《高等数学（一）》课程思政案例

案例编号	09	**所在章节**	第二章 导数与微分 第一节 导数的概念
案例名称 （思政元素）	(1)实践是认识的来源； (2)道路自信、制度自信。	**教学切入点**	中国故事—— 高铁成就； 导数概念的引入
育人目标	（1）通过中国故事的讲解，帮助学生树立道路自信、制度自信。 （2）通过导数概念的引入，帮助学生树立实践是认识的来源。		
内容、方法及实施过程	**1. 内容：** 导数的概念 **2. 方法：** 案例式、探究式 **3. 实施过程：** （1）**导入：** 观看视频，了解中国高铁近十年取得的巨大成就。截至 2020 年底，中国铁路营运总里程达 14.14 万 km，其中高速铁路 3.6 万 km，位居世界第一，超过世界其他国家高铁运营里程的总和。中国已建成世界上规模最大、运营速度最快、具有完全自主知识产权的高速铁路网络。中国高铁凭借自身研发、创新、建设的综合实力有底气、有自信成为世界的“宠儿”。5 年间，中国高铁用独特的方式成为印证“中国速度”，成为中国制造走向海外的一张“国家名片”。过去的 5 年里，中国铁路走过了砥砺奋进的发展历程。2017 年 9 月 21 日，7 对“复兴号”动车组列车在京沪高铁线以 350km 的时速运营，从“和谐号”到“复兴号”，中国铁路事业的巨变让国人为之振奋，更让世界为之惊叹。 **切入思政元素：** 道路自信、制度自信。 （2）**新授：** 对比“和谐号”和“复兴号”动车组的各项参数可以发现，其中有两个方面的区别尤为突出，一是车头的外观明显不同，二是运营速度存在差别。针对这两个方面的区别，我们提出以下两个同题：			

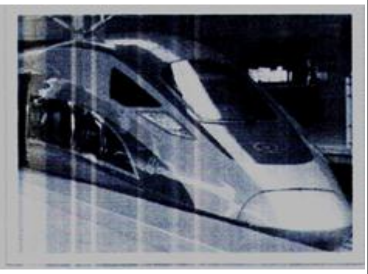

图 1-1“和谐号”　　　　　　　　图 1-2“复兴号”

①为什么“复兴号”动车组的车头比“和谐号”动车组的车头更加扁平？如何用数学方法刻画动车组车头曲线？

②如何用数学方法精确刻画速度的概念？

切线问题：

将“和谐号”和“复兴号”的动车组车头曲绘制在同一坐标系下，如图

1-3 所示。

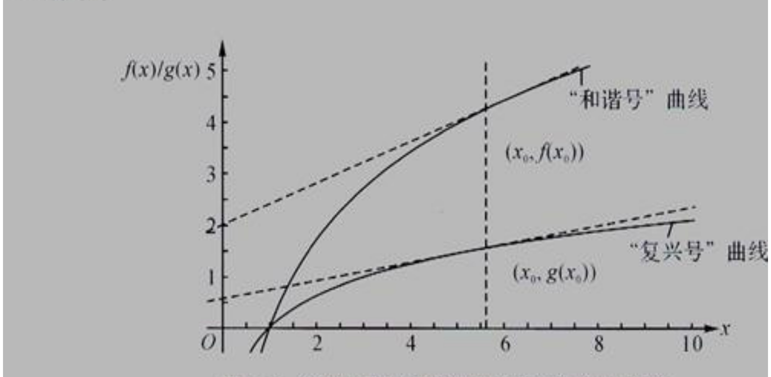

图 1-3 “和谐号”和“复兴号”动车组车头曲线

可以发现当自变量取相同值的时候，两条曲线的切线斜率是不一样的。因此，我们可以通过考虑切线问题，研究动车组车头曲线的差别。

如图 1-4 所示，设有曲线 C 及 C 上的一点 M，在点 M 外另取 C 上一点 N，作割线 MN。当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，如果割线 MN 绕点 M 旋转而趋于极限位置 MT，直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线。这里极限位置的含义是：只要弦长|MN|趋于零，$\angle NMT$ 也趋于零。

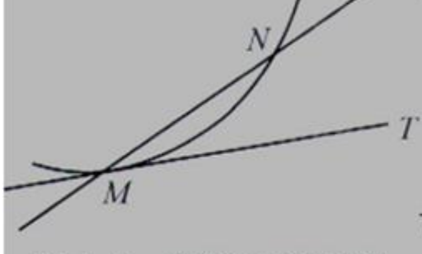

图 1-4 曲线 C 的切线

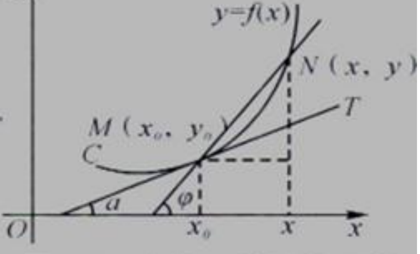

图 1-5 曲线 C 的切线函数

现在就曲线C为函数$y=f(x)$的图形的情形来讨论切线问题。如图 1-5 所示，设$M(x_0,y_0)$是曲线C上的一个点，则$y_0=f(x_0)$。根据上述定义，要定出曲线C在点M处的切线，只要定出切线的斜率就行了。为此，在点M外另取C上的一点$N(x,y)$，于是割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (1)$$

式中，φ为割线MN的倾角。当点N沿曲线C趋于点M时，$x\to x_0$。如果当$x\to x_0$时，上式的极限存在，设为k，即

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

动车运行瞬时速度：

为研究方便，我们将动车速度问题简化为动车沿直线铁轨运动的速度问题。设动车（视为质点）沿铁轨直线运动。在直线上引入原点和单位点（即表示实数 1 的点），使直线成为数轴。此外，再取定一个时刻作为测量时间的零点。设动车于时刻在直线上的位置的坐标为s（简称位置）。这样，运动完全由某个函数$s=f(t)$所确定。这个函数对运动过程中所出现的t值有定义，称为位置函数。在最简单的情形下，该动车所经过的路程与所花的时间成正比。就是说，无论取哪一段时间间隔，比值总是相同的。

$$\text{平均速度}=\frac{\text{行驶的路程}}{\text{所花的时间}} \qquad (3)$$

$$\bar{v}=\frac{s-s_0}{t-t_0}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \qquad (4)$$

可认为是动车在上述时间间隔内的平均速度。如果时间间隔选得较短，这个比值式（4）在实践中也可用来说明动车在时刻t_0的速度。但对于动车在时刻t_0的速度的精确概念来说，这样做是不够的，而更确切地应当这样：令$t\to t_0$，取式（4）的极限，如果这个极限存在，设为v_0，

	即 $v_0=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$。这时就把这个极限值称为动车在 t_0 时的（瞬时）速度。 **导数的概念：**定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地函数 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $$y'\Big\|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (5)$$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导有时也说成 $f(x)$ 在点 x_0 具有导数或导数存在。 导数的定义式（5）也可取不同的形式，常见的有 $$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad (6)$$ $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (7)$$ 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间内的每点处都可导，就称函数 $y=f(x)$ 在开区间内可导。 **（3）巩固练习：**已知 $y=\ln x$，求 $y'\big\|_{x=2}$。 **（4）课后：** 教学在教授学生理论知识的同时，一方面使学生增加了民族自豪感和自信心，感受到作为中华民族伟大复兴事业的见证者和参与者是无比荣光的；另一方面也让学生知道了成就取得背后的艰辛与汗水，真正有竞争力的手段就是多掌握科学文化知识。

教学体会	让学生在“中国故事”的学习中不但加深对数学概念的理解，而且产生对伟大祖国强烈的热爱，让学生为生活在这个时代，生活在我们伟大的祖国而感到自豪，以各界精英为奋斗的榜样，努力拼搏，为服务祖国、服务人民打下良好的基础。