

第六章 空间几何体

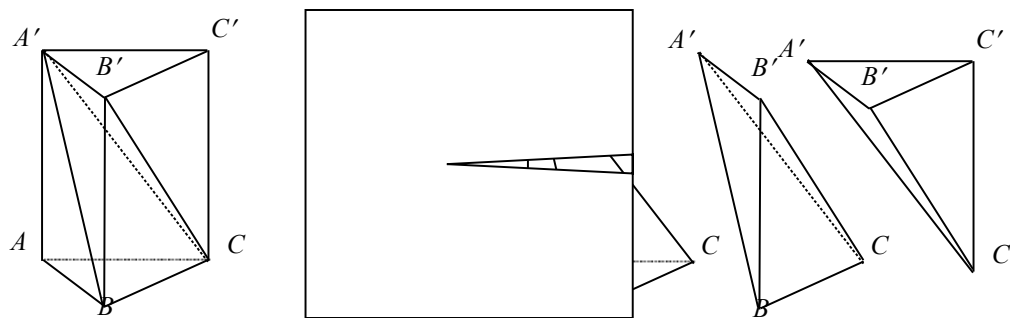
6.2.2 锥体和球的体积

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

1. 锥体体积

探究棱锥与同底等高的棱柱体积之间的关系.



三棱锥与同底等高的三棱柱的关系

锥体（棱锥、圆锥）的体积是：

$$V = \frac{1}{3} Sh \quad (\text{其中 } S \text{ 为底面面积, } h \text{ 为高})$$

例 1 在长方体 $ABCD-A/B/C/D/$ 中，可以截出一个棱锥 $C-A/DD/$ ，求这个棱锥的体积与剩余体积之比

解：将长方体看成四棱柱 $ADD/A/-BCC/B/$ ，设它的底面 $ADD/A/$ 为 S ，高为 h ，则它的体积为 $V=Sh$

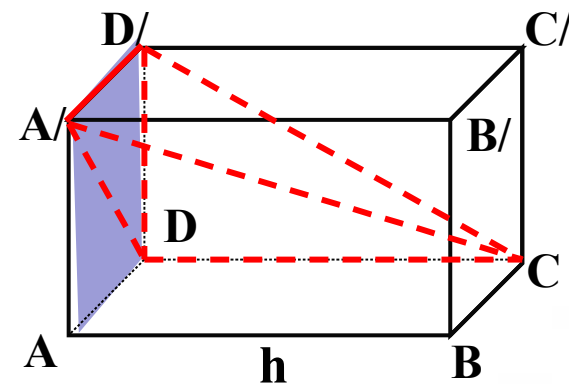
棱锥 $C-A/DD/$ 的底面积 $\frac{1}{2}S$

因此棱锥 $C-A/DD/$ 的体积 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} Sh = \frac{1}{6} V$

所以剩余部分的体积是 $V - V_1 = V - \frac{1}{6} V = \frac{5}{6} V$

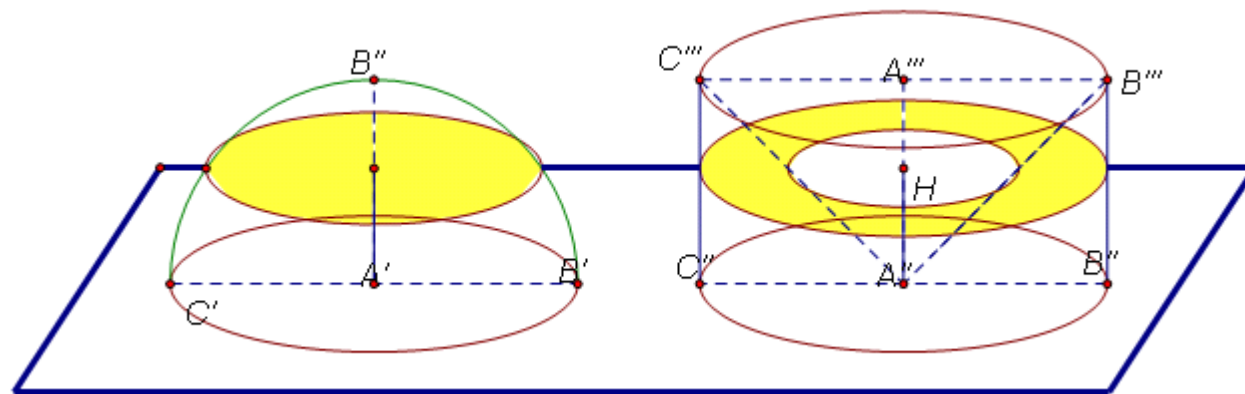
因此这个棱锥的体积与剩余部分的体积之比为

$$\frac{V_1}{V - V_1} = \frac{1}{6} V \div \frac{5}{6} V = 1:5$$



课堂探究

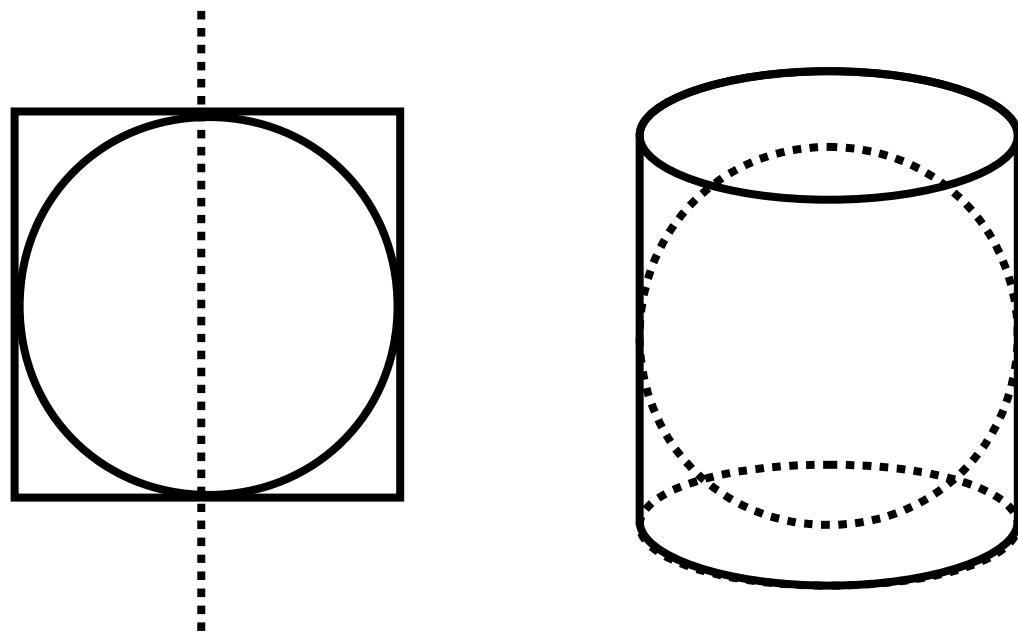
结论：一个底面半径和高都等于 R 的圆柱，挖去一个以上底面为底面，下底面圆心为顶点的圆锥后，所得几何体的体积与一个半径为 R 的半球的体积相等



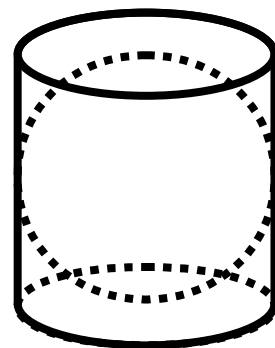
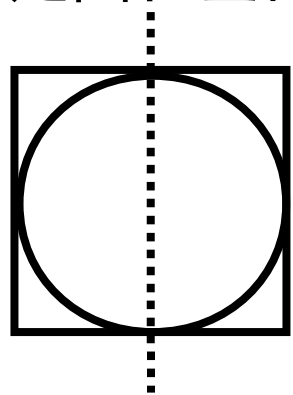
$$\frac{1}{2} V_{\text{球}} = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$V_{\text{球}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

例 2 如图所示的圆及其外切正方形绕图中由虚线所示的对称轴旋转一周生成的几何体称为圆柱容球。求证：在圆柱容球中，球的体积是圆柱体积的 $\frac{2}{3}$ ，球的表面积也是圆柱全面积的 $\frac{2}{3}$ 。



例 2 求证：在圆柱容球中，球的体积是圆柱体积的 $\frac{2}{3}$ ，球的表面积也是圆柱全面积的 $\frac{2}{3}$ 。



证明：（1）设球的半径为 R ，则圆柱的底面半径为

R ，高为 $2R$ 。则 $\frac{4}{3}\pi R^3$ 球 $\div$ 圆柱 $= \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$ ，

$$V_{\text{球}} : V_{\text{柱}} = \frac{4}{3}\pi R^3 : 2\pi R^3 = \frac{2}{3} \quad \text{所以 } V_{\text{球}} = \frac{2}{3} V_{\text{圆柱}}$$

（2）因为 $S_{\text{球}} = 4\pi R^2$ ，

$$S_{\text{圆柱}} = S_{\text{圆柱侧}} + S_{\text{圆柱底}} = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2，$$

$$S_{\text{球}} : S_{\text{柱}} = 4 : 6 = 2 : 3$$

$$S_{\text{球}} = \frac{2}{3} S_{\text{圆柱}}$$

练习

1. 已知一个球的半径是 3cm, 求这个球的体积

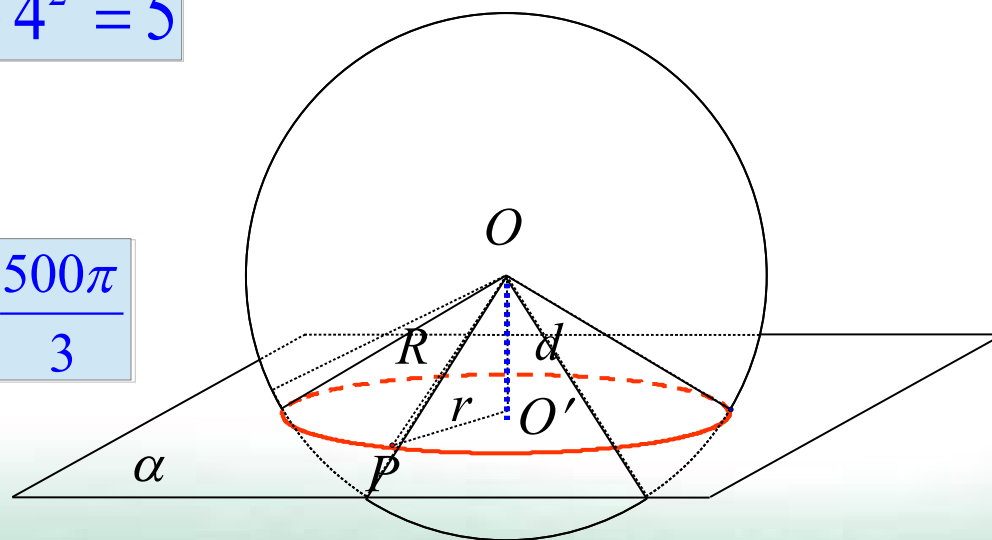
$$\text{解: } V_{\text{球}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 36\pi$$

2. 一个平面截一个球, 得到直径是 6cm 的圆面, 球心到这个圆面的距离是 4cm。求该球的表面积和体积。

$$\text{解: } R = \sqrt{r^2 + d^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$S_{\text{球}} = 4\pi \times 5^2 = 100\pi$$

$$V_{\text{球}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \times 5^3 = \frac{500\pi}{3}$$





多面体与旋转体的体积公式

柱体	$V = Sh$
锥体	$V = \frac{1}{3}Sh$
球	$V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$



谢谢观看！

