

第五章 数列

5.2.2 等差数列的前 n 项和

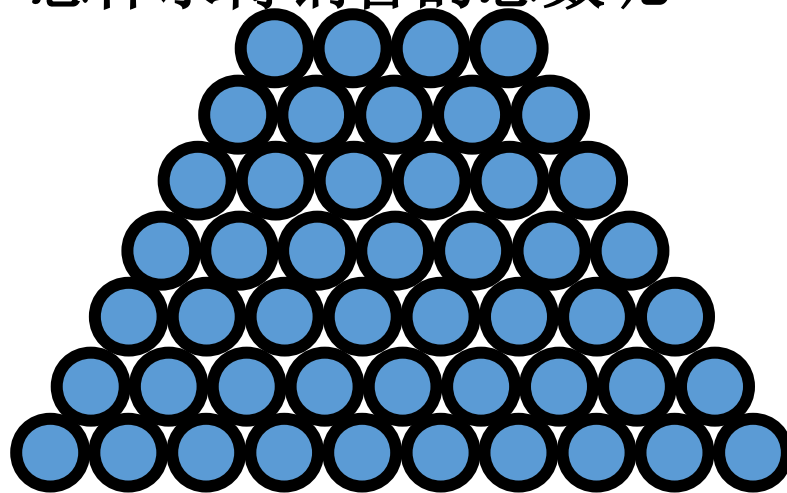
授课教师：李辉

泰山护理职业学院



问题 某工厂的仓库里堆放一批钢管，共堆放了 7 层，
从上到下每层钢管的数为 4，5，6，7，8，
9，10

如果钢管很多，怎么办？
怎样求得钢管的总数呢？



7 项构成等差数列， $a_1=4$ ， $a_7=10$

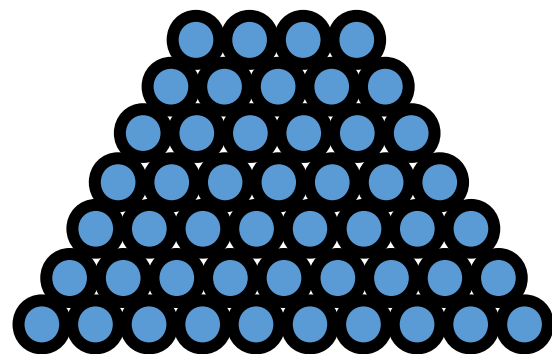


解 用 S_7 来表示钢管的总数，则

$$S_7 = 4+5+6+7+8+9+10 \quad ①$$

将各项次序反过来，又可写成

$$S_7 = 10+9+8+7+6+5+4 \quad ②$$



把①②两式对应项相加，和都等于 14，

所以把①②两式分别相加，得

$$2S_7 = (4+10) \times 7$$

$$S_7 = \frac{(4+10)}{2} \times 7 = 49$$

$$\text{即 } s_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2}$$

$$\text{类推 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = a_3 + a_5 = a_4 + a_4$$

在等差数列中，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$

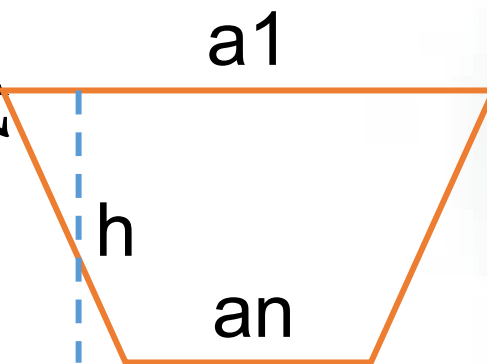
1. 等差数列的前 n 项和公式

一般地，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记作 S_n ，即

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n .$$

可以得到等差数列的前 n 项和公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$



等差数列前 n 项的和等于首末两项的和乘以项数除以

2 .



1. 等差数列的前 n 项和公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} . \quad \textcircled{1}$$

因为 $a_n = a_1 + (n - 1)d$, 所以上面公式又可写成

$$S_n = \frac{n[a_1 + a_1 + (n - 1)d]}{2} = \frac{2na_1 + n(n - 1)d}{2} = na_1 + \frac{n(n - 1)d}{2}$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n - 1)}{2} d . \quad \textcircled{2}$$

等差数列的前 n 项和公式

$$(1) S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

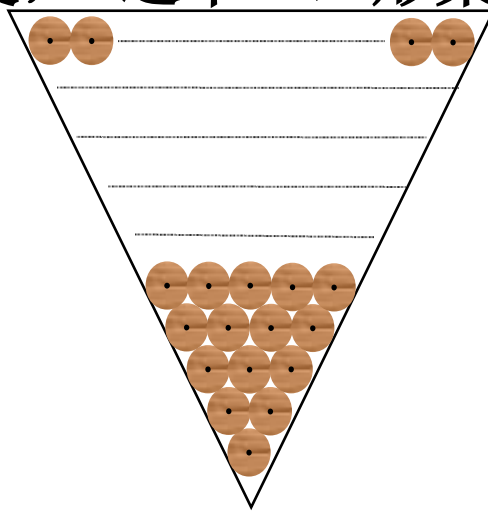
已知 n, a_1, a_n , 求 S_n

$$(2) S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

已知 n, a_1, d , 求 S_n

例 6 一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放一支

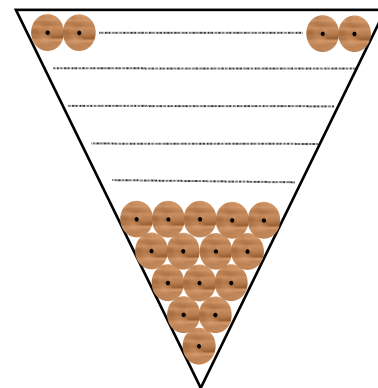
铅笔，往上每一层都比它下面一层多放一支，最上面放 120 支，这个 V 形架上共放多少支铅笔？



课堂探究

$$(1) S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$(2) S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$



解：由题意可知，这个 V 形架上共放 120 层铅笔，且自下而上各层的铅笔数组成等差数列，记为 $\{a_n\}$ 。

其中 $a_1=1, d=1, a_{120}=120, n=120$

根据等差数列前 n 项和公式，得

即 V 形架上共放 7260 支铅笔

思考：用第 2 个求和公式行吗？

$$S_{120} = \frac{120 \times (1 + 120)}{2} = 7260$$

$$S_{120} = 120 \times 1 + \frac{120(120-1)}{2} \times 1 = 7260$$



例 7 在小于 100 的正整数的集合中，有多少个数是 7 的倍数？并求它们的和。

分析：

（1）在小于 100 的正整数的集合中，7 的倍数有哪些？共有多少个？

（2）这些数构成了一个什么样的数列？

（3）如何用数列符号表示已知量？所求量？



例 7 在小于 100 的正整数的集合中，有多少个数是 7 的倍数？并求它们的和。

解 在小于 100 的正整数的集合中，以下各数是 7 的倍数

$$7, 7 \times 2, 7 \times 3, \dots, 7 \times 14.$$

显然，这是一个等差数列：其中 $a_1 = 7$, $d = 7$, $n =$

$$14, a_{14} = 98$$

因此

$$S_{14} = \frac{14 \times (7 + 98)}{2} = 735$$

即在小于 100 的正整数的集合中，有 14 个数是 7 的倍数，

它们的和等于 735

练习 在等差数列 $-5, -1, 3, 7, \dots$ 中, 前多少项

解 这里 ~~的和是~~ 5345 ? $-1 - (-5) = 4$, $S_n = 345$.

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

根据等差数列的前 n 项和公式

$$345 = -5n + \quad \times 4,$$

$$\text{整理得 } 2n^2 - 7n - \frac{23}{2}345 = 0,$$

$$\text{解得 } n_1 = 15, \quad n_2 = - \quad (\text{不合题意, 舍去}).$$

所以 $n = 15$.



1. 等差数列的前 n 项和公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} .$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d .$$

2. 在等差数列中，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$

谢谢观看！

