

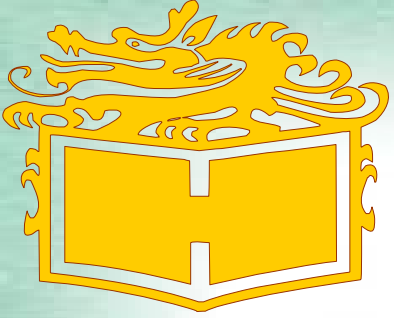


第 2 章 方程与不等式

2.2.4 一元二次不等式

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

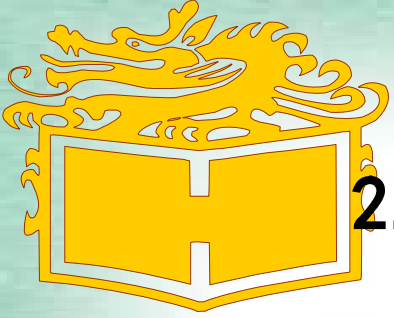


1. 一元二次不等式的概念

含有一个未知数，并且未知数的最高次数为二次的不等式，叫做一元二次不等式.

一元二次不等式的一般形式

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0 \quad (a \neq 0).$$



2. 一元二次不等式 $x^2 \leq m^2$ 和 $x^2 \geq m^2$ ($m > 0$) 的解法

由不等式推论 对于 $a > 0$, $b > 0$, 有 $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$ 得

对任意实数 x, m , 有 $|x| > |m| \Leftrightarrow x^2 > m^2$, 则 $|x| \geq |m| \Leftrightarrow x^2 \geq m^2$

$$|x| \leq |m| \Leftrightarrow x^2 \leq m^2$$

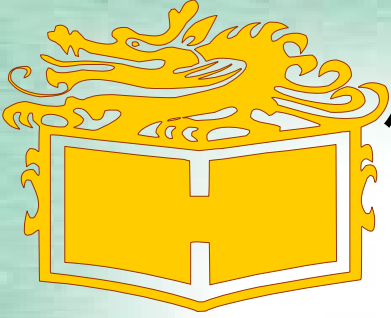
于是当 $m > 0$ 时, 有

$$x^2 \leq m^2 \Leftrightarrow |x| \leq m \Leftrightarrow |x| \leq m \Leftrightarrow \{x | -m \leq x \leq m\}$$

$$x^2 \geq m^2 \Leftrightarrow |x| \geq m \Leftrightarrow |x| \geq m \Leftrightarrow \{x | x \leq -m \text{ 或 } x \geq m\}$$

例如 $x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

$$x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -2$$



例 8 解下列不等式：

(1) $(x+2)^2 < 4$

(2) $(x-1)^2 \geq 9$

解：(1) 原不等式等价于 $|x+2| < 2$

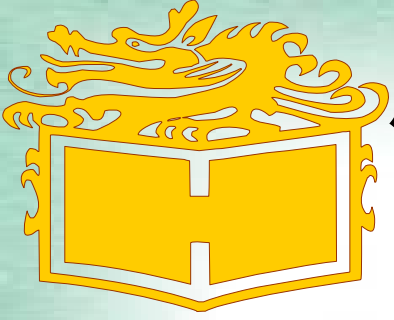
即

$$-2 < x+2 < 2,$$

解得 $-4 < x < 0$

所以原不等式解集为 $(-4, 0)$





例 8 解下列不等式：

(1) $(x+2)^2 < 4$

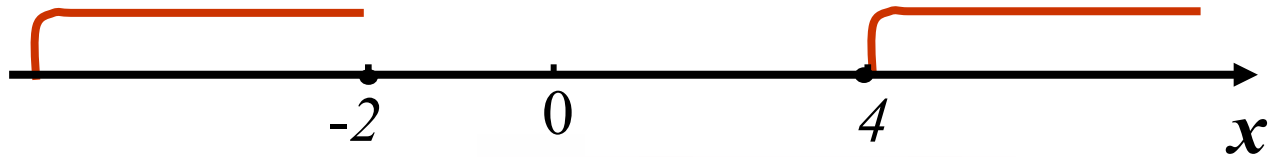
(2) $(x-1)^2 \geq 9$

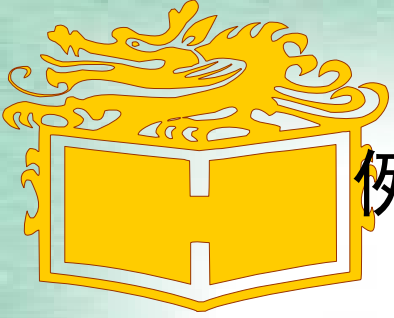
解：(2) 原不等式等价于 $|x-1| \geq 3$

即 $x-1 \leq -3$ 或 $x-1 \geq 3$ ，

解得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 4$

所以原不等式解集为 $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$





例 9 用配方法解下列不等式

(1) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ (2) $-2x^2 + 5x + 3 < 0$

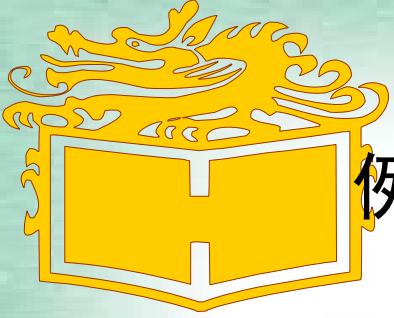
解：(1) 原不等式左边配方，得 $x^2 - 2x + 1 \leq 3 + 1$,

$$(x-1)^2 \leq 4, \quad \text{即 } |x-1| \leq 2,$$

$$\text{从而 } -2 \leq x-1 \leq 2$$

$$\text{解得 } -1 \leq x \leq 3$$

所以原不等式的解集为 $[-1, 3]$



例 9 用配方法解下列不等式

(1) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

(2) $-2x^2 + 5x + 3 < 0$

解：(2) 原不等式等价于

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} > 0, x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 > \frac{3}{2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 > \frac{49}{16} \quad \blacklozenge \quad \left|x - \frac{5}{4}\right| > \frac{7}{4}$$

$$x - \frac{5}{4} < -\frac{7}{4}$$

或

$$x - \frac{5}{4} > \frac{7}{4}$$

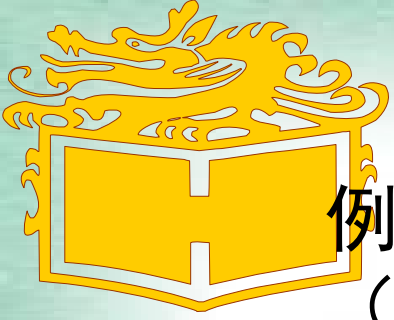
$$x < -\frac{1}{2}$$

或

$$x > 3$$

所以原不等式的解集为

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$$



例 10 解下列不等式

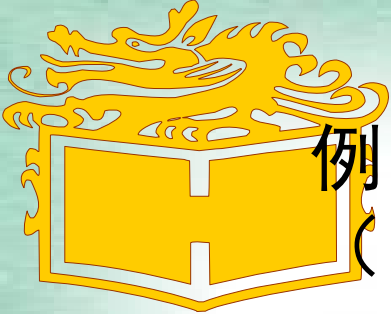
(1) $x^2 - 2x + 3 \leq 0$ (2) $x^2 + 4x + 5 > 0$ (3) $x^2 - 2x + 1 > 0$

解：(1) 原不等式等价于 $x^2 - 2x + 1 \leq -3 + 1$

即 $(x-1)^2 \leq -2$

因为无论 x 为何值，总有 $(x-1)^2 \geq 0$ 成立，

所以原不等式的解集是空集 \emptyset



例 10 解下列不等式

(1) $x^2 - 2x + 3 \leq 0$ (2) $x^2 + 4x + 5 > 0$ (3) $x^2 - 2x + 1 > 0$

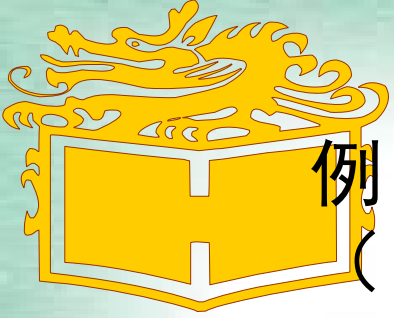
解： (2) 原不等式等价于 $x^2 + 4x + 4 > -5 + 4$

即 $(x+2)^2 > -1$

因为无论 x 为何值，总有 $(x+2)^2 \geq 0$ 成立，

从而 $(x+2)^2 + 1 > 0$ 恒成立

所以原不等式的解集是实数集 \mathbb{R}



例 10 解下列不等式

(1) $x^2 - 2x + 3 \leq 0$ (2) $x^2 + 4x + 5 > 0$ (3) $x^2 - 2x + 1 > 0$

解：(3) 原不等式等价于 $(x-1)^2 > 0$

因为当 $x \neq 1$ 时，总有 $(x-1)^2 > 0$ 成立

所以原不等式的解集是 $\{x \mid x \neq 1\}$



练习

(1) 解不等式 $x^2-4x+4>0$

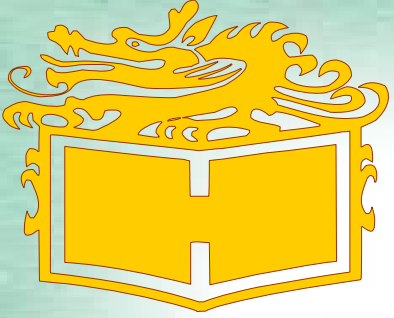
解 : $x^2-4x+4=(x-2)^2$,

因为对于任意实数 x , 都有 $(x-2)^2 \geq 0$,

所以原不等式的解集为 $\{x \mid x \neq 2\}$.

(2) 解不等式 $x^2-4x+4<0$

解 : 因为没有有一个实数 x 使得不等式 $(x-2)^2 < 0$ 所以原不等式的解集为 \emptyset .



课 堂 小 结

当 $m > 0$ 时, 有

$$x^2 \leq m^2 \Leftrightarrow |x| \leq m$$

$$x^2 \geq m^2 \Leftrightarrow |x| \geq m$$



谢谢观看！

