

第二章 方程与不等式

2.1 一元二次方程

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

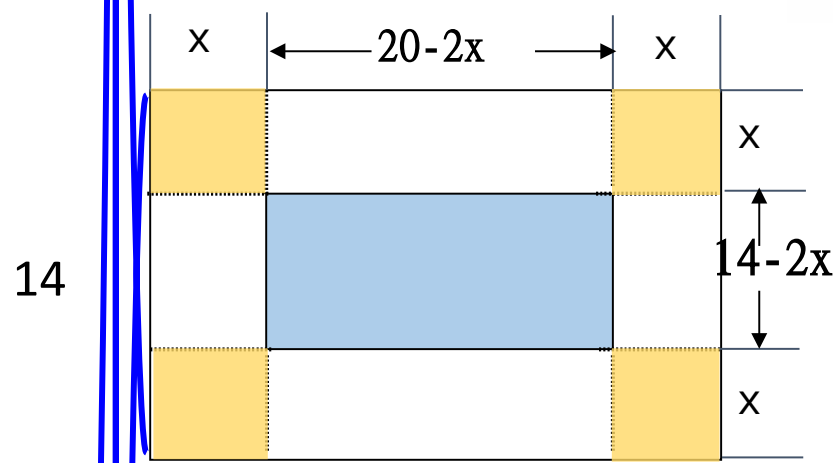


如图，有一块矩形纸板，长为 20cm，宽为 14cm，在它的四角各切去一个同样的正方形，然后将四周突出部分沿虚线折起，就能制作一个无盖方盒，如果要制作的无盖方盒的底面积为 72cm^2 ，那么纸板各角应切去边长为多大的正方形？

解：设切去的小正方形的边长为 x ，则盒子底面长方形的长是 $(20-2x)\text{cm}$ ，宽是 $(14-2x)\text{cm}$ 。根据题意列方程

$$(20-2x)(14-2x)=72.$$

化简，得 $x^2-17x+52=0$ 。
再求出 x 即可。



一元二次方程

20

(三) 一元二次方程根与系数的关系（韦达定理）

若方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根为 x_1, x_2 ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}$$

推论

特别地：

若方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ,

$$\text{则： } x_1 + x_2 = -p, x_1 \bullet x_2 = q$$

(一) 一元二次方程概念

1、一元二次方程的概念

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程。

2、关于 x 的一元二次方程的一般形式

$ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$)，其中 a 为二次项系数， b 为一次项系数， c 为常数项。

3. 方程的解 能使方程左右两边相等的未知数的值就叫方程的解

4. 求出方程的解或确定方程无解的过程，叫做解方程

(二) 一元二次方程的解法

1、基本解法：配方法、因式分解法、公式法、开平方法

2、求根公式

关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$, ($a \neq 0$)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} (b^2 - 4ac \geq 0)$$

用配方法解一元二次方程的步骤：

1. 变形：把二次项系数化为 1
2. 移项：把常数项移到方程的右边；
3. 配方：方程两边都加上一次项系数一半的平方；
4. 用开平方法求解。

例 用配方法解一元二次方程

(1) $x^2+2x-3=0$ (2) $x^2-4x-3=0$

(3) $2x^2-5x-3=0$ (4) $x^2-6x+10=0$

解 : (1) 移项 , 得 $x^2+2x=3$,

配方 , 得 $x^2+2x+1=3+1$

即 $(x+1)^2=4$. 开平方 ,

得 $x+1=-2$ 或 $x+1=2$

解得 $x_1=-3$, $x_2=1$

所以原方程的两个根为 $-3, 1$

例 用配方法解一元二次方程

(1) $x^2+2x-3=0$ (2) $x^2-4x-3=0$

(3) $2x^2-5x-3=0$ (4) $x^2-6x+10=0$

(2) 移项，得 $x^2-4x=3$ ，配方，

得 $x^2-4x+(-2)^2=3+(-2)^2$

即 $(x-2)^2=7$. 开平方，

得 $x-2=$ 或 $x-2=$

解得 $x_1=$, $x_2=$

所以原方程的两个根为

$$2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}$$

$$(3) 2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad (4) x^2 - 6x + 10 = 0$$

(3) 方程两边都除以 2 , 得 $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$, 移项 $x^2 - \frac{5}{2}x = \frac{3}{2}$

配方 , 得 $x^2 - \frac{5}{2}x + (\frac{5}{4})^2 = \frac{3}{2} + (\frac{5}{4})^2$

即 $(x - \frac{5}{4})^2 = \frac{49}{16}$. 开平方 , 得 $x - \frac{5}{4} = -\frac{7}{4}$ 或 $x - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$

解得 $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, 所以原方程的两个根为 $-\frac{1}{2}$, 3

(3) $2x^2-5x-3=0$ (4) $x^2-6x+10=0$

(4) 移项，得 $x^2-6x=-10$ ，

配方，得 $x^2-6x+32=-10+32$

即 $(x-3)^2=-1$.

所以原方程无实数解

练习

已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+a=0$ 的一个根是 3，求 a 的值。

解：把 $x=3$ 代入 $x^2+ax+a=0$

得： $9+3a+a=0$

所以 $a = -\frac{9}{4}$

（三）一元二次方程根与系数的关系（韦达定理）

若方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根为 x_1, x_2 ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}$$

练习

不解方程，求方程两根的和与两根的积：

$$2x^2 - 4x + 1 = 0$$

解： $x_1 + x_2 = -\frac{-4}{2} = 2$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$$

(四) 一元二次方程根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$

(1) $b^2 - 4ac > 0$ 方程有两个不相等的实数根

(2) $b^2 - 4ac = 0$ 方程有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

(3) $b^2 - 4ac < 0$ 方程没有实数根



课堂小结

一元二次方程复习

一元二次方程

一元二次方程的定义

把握住：一个未知数，未知数的最高次数是 2，是整式方程

一般形式：

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

直接开平方法：适应于形如 $(x - k)^2 = h \quad (h > 0)$ 型

一元二次方程的解法

配方法：适应于任何一个一元二次方程

公式法：适应于任何一个一元二次方程

因式分解法：适应于左边能分解为两个一次式的积，右边是 0 的方程



一元二次方程的求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (b^2 - 4ac \geq 0)$$

一元二次方程的解的情况

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 两个不相等的实数根

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 两个相等的实数根

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 没有实数根



谢谢观看！

