19.3 线性规划问题的图解法

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

19.1 问题　某工厂用 A、B 两种配件生产甲、乙两种产品，每生产一件甲产品使用 4 个 A 配件耗时 1h，每生产一件乙产品使用 4 个 B 配件耗时 2h，该厂每天最多可从配件厂获得 16 个 A 配件和 12 个 B 配件，按每天工作 8h 计算，该厂所有可能的日生产安排是什么？若生产一件甲产品可获利润 2 万元，生产一件乙产品可获利润 3 万元，则如何安排日生产，可使工厂所获利润最大？

分析：将已知数据列成表格

产品	A	B	耗时
甲	4		1h
乙		4	2h
限制	16	12	8h

$$z = 2x + 3y$$

线性目标函数

解　设甲、乙两种产品的产量分别为 x， y 件，工厂利润 z 万元，由题意得

$$\begin{cases} x+2y\le 8 \\ 4x \le 16 \\ 4y \le 12 \\ x\ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

线性约束条件

如何求 z 的最大值呢？

解　设甲、乙两种产品的产量分别为 x， y 件，工厂利润 z 万元

线性约束条件为：
$$\begin{cases} x+2y\le 8 \\ 4x\le 16 \\ 4y\le 12 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$$

目标函数是：$z=2x+3y$

如何安排日生产，可使工厂所获利润最大？

于是问题转化为：当 x 、 y 满足不等式组且为整数时，求 Z 的最大值

首先作出二元一次不等式组所表示的平面区域，即可行域.

$$\begin{cases} x+2y\le 8 \\ 4x\le 16 \rightarrow x\le 4 \\ 4y\le 12 \rightarrow y\le 3 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

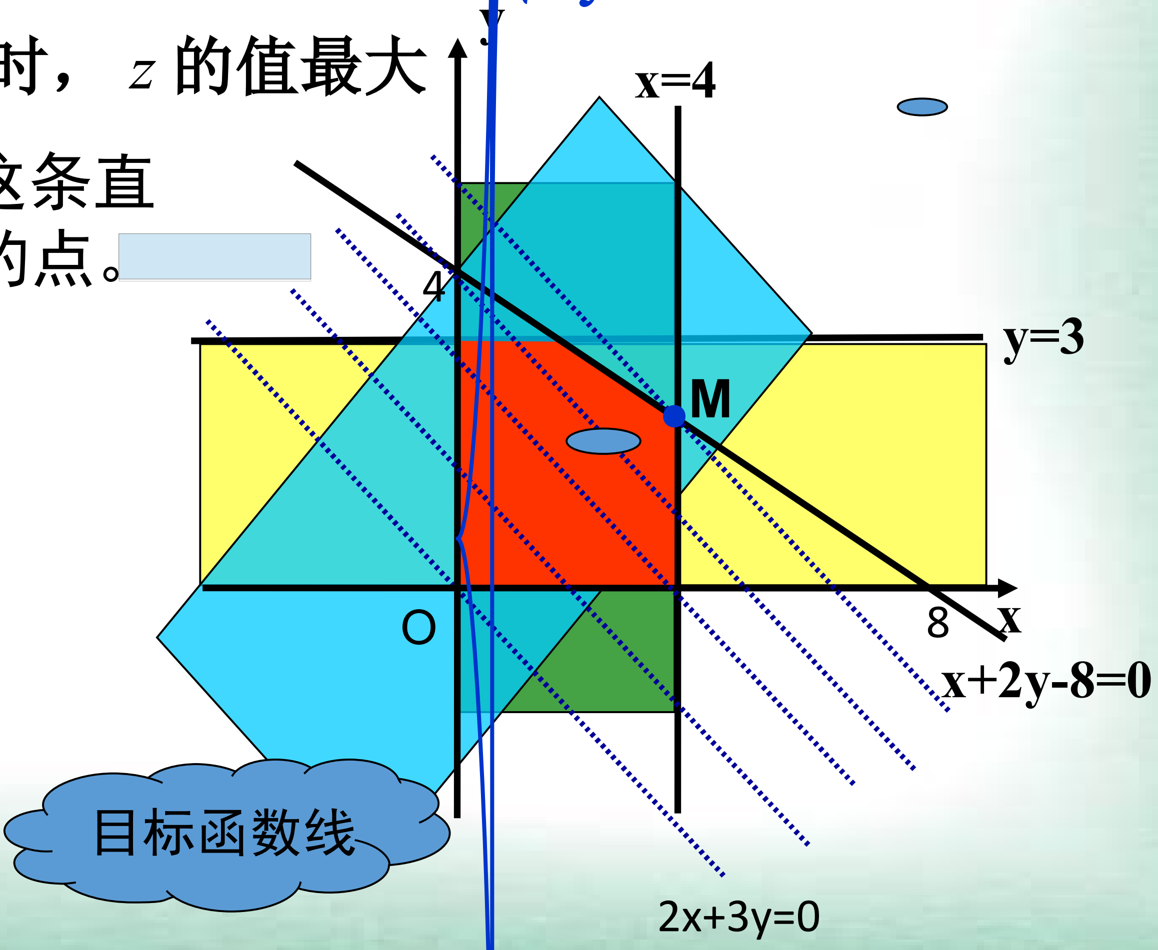
把目标函数 $z=2x+3y$ 变形为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$

它表示斜率为 $-\frac{2}{3}$ 随 z 变化的一组平行直线系

$\frac{z}{3}$ 是直线在 y 轴上的截距，当截距最大时，z 的值最大

令 z=0，画出直线 2x+3y=0，然后平移这条直线，在红色阴影区域内寻找使截距最大的点。

如图可见，当直线 $z=2x+3y$ 经过阴影区域上的 x=4 与 x+2y-8=0 的交点 M 时，截距最大，即 z 最大，



M 点是两条直线的交点，解方程组 $\begin{cases} x=4 \\ x+2y-8=0 \end{cases}$

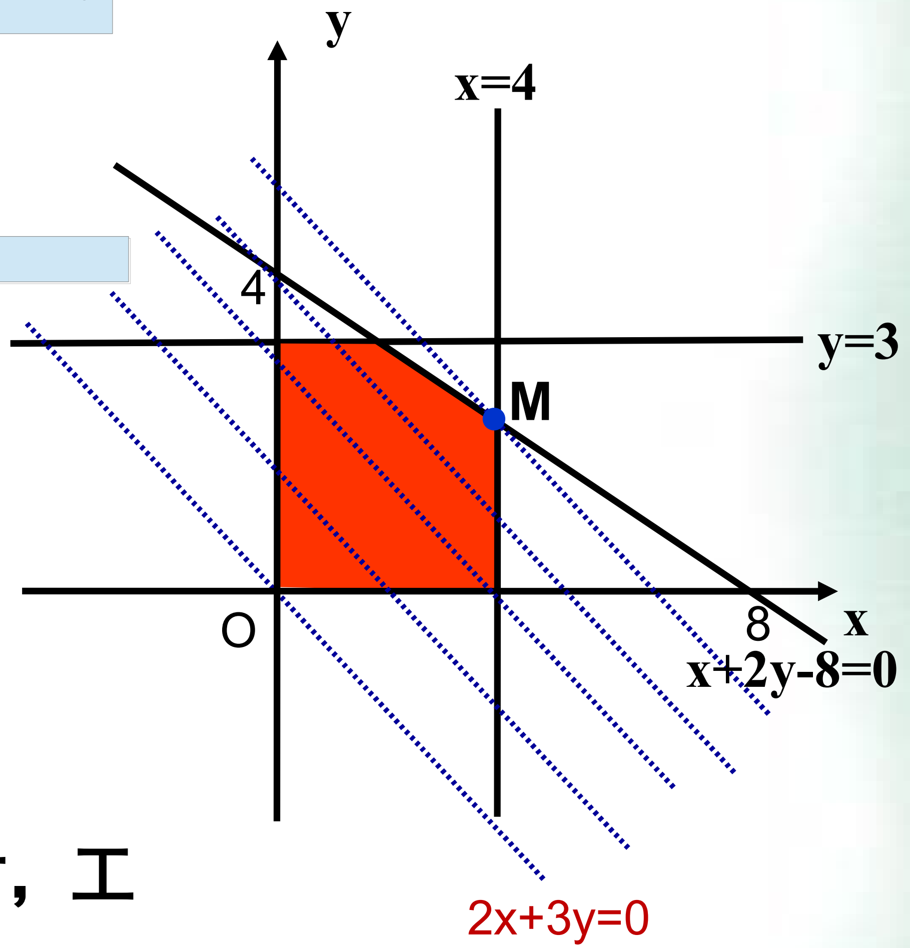
得 M 点的坐标为 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

：

把点 M(4, 2) 代入目标函数　Z=2x+3y

所以　zmax ＝ 2x ＋ 3y ＝ 2×4+3×2=14

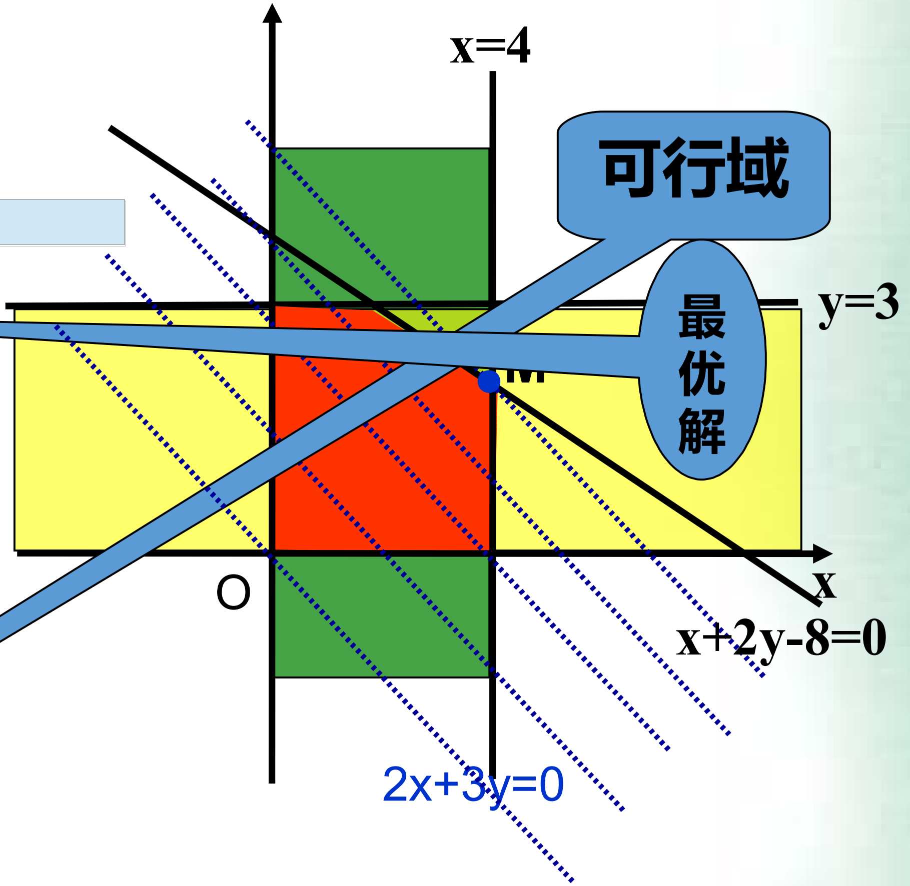
由此可知，每天生产甲产品 4 件、乙产品 2 件时，工厂可得最大最大利润 14 万元.



线性规划相关概念

一般地，在线性规划的问题中，画出线性约束条件所表示的平面区域，在平面区域上找出线性目标函数最值的方法，叫线性规划问题的图解法。

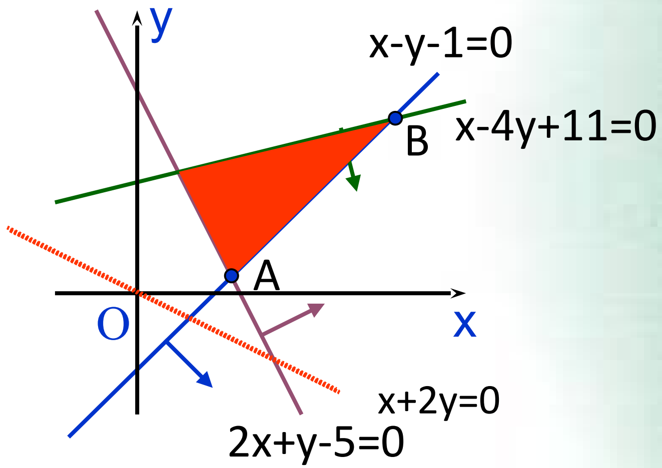
满足线性约束条件的解（x， y）叫做**可行解**，由所有的可行解组成的集合叫做**可行域**。使目标函数取得最大值和最小值的可行解，它们都叫做这个问题的**最优解**。



例 1　已知线性约束条件为 $\begin{cases} x-y-1\le 0 \\ 2x+y-5\ge 0 \\ x-4y+11\ge 0 \end{cases}$

求使目标函数 z=x+2y 满足线性约束条件的最优解及最大值、最小值

解：在直角坐标系中，画出可行域



将目标函数变形为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$

当 $\frac{z}{2}$ 取得最大值时， z 取得最大值

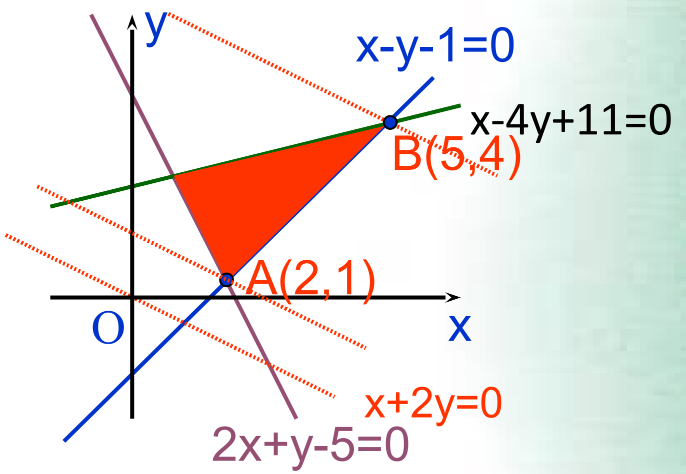
；$\frac{z}{2}$ 取得最小值时， z 取得最小值

令 z=0 ，画出直线 x+2y=0，然后平移这条直线，可知当直线经过 A 点时

，取最小值；当直线经过 B 点时， z 取得最大值 .

因为点 A 是直线 x-y-1=0 与直线 2x+y-5=0 的交点，点 B 是直线 x-y-1=0 与直线 x-4y+11=0 的交点

解方程组 $\begin{cases} x-y-1=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 即 A(2, 1)



把点 A(2, 1) 代入目标函数　Z=x+2y

此时 zmin=x+2y=2+2×1=4

解方程组 $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-4y+11=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ 即 B(5, 4)

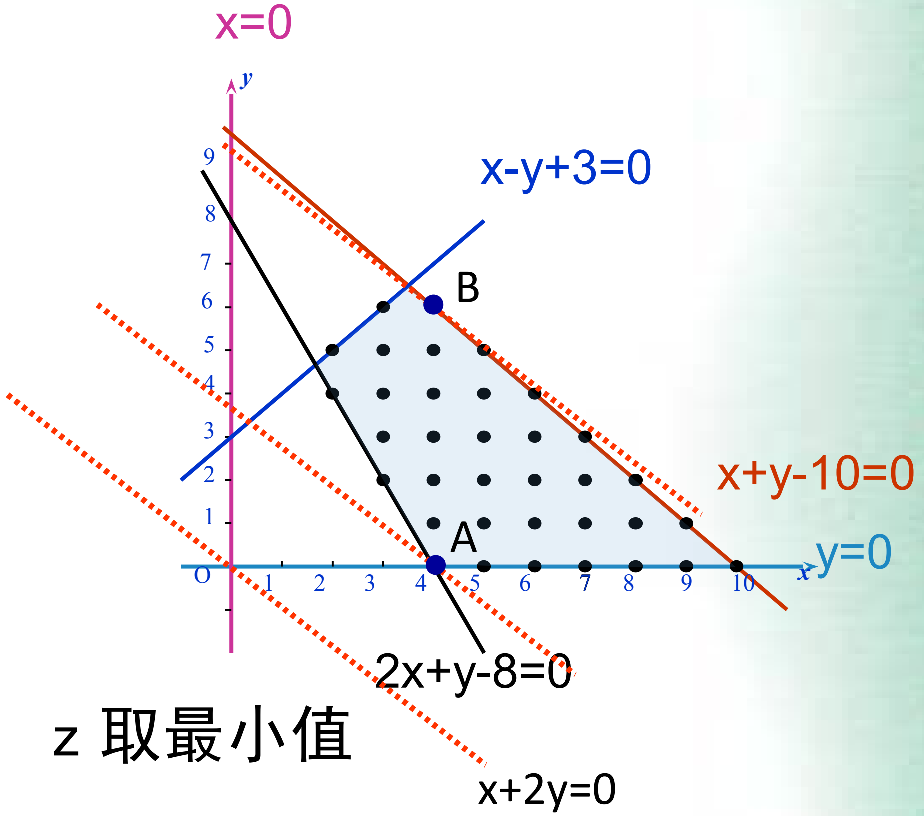
把点 B(5, 4) 代入目标函数　Z=x+2y

此时 zmax==5+2×4=13

所以 A(2, 1) 和 B(5, 4) 就是线性目标函数 z=x+2y 的最优解，且 z 的最小值和最大值依次为 4 和 13.

例 2　求函数 z=2x+4y 的最大值和最小值，其中 x, y 满足线性约束条件

$$\begin{cases} x+y-10\leqslant 0 \\ x-y+3\geqslant 0 \\ 2x+y-8\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ x\in Z \\ y\in Z \end{cases}$$



解：在直角坐标系中，画出可行域，并在可行域内找出横坐标和纵坐标都是整数的点。

将目标函数变形为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{4}$

当 $\frac{z}{4}$ 取最大值时， z 取最大值；当 $\frac{z}{4}$ 取最小值时， z 取最小值

令 z=0 ，画出直线 x+2y=0 ，然后平移这条直线，当直线过点 A 时 z 取最小值；当直线过 B 时， z 取最大值。

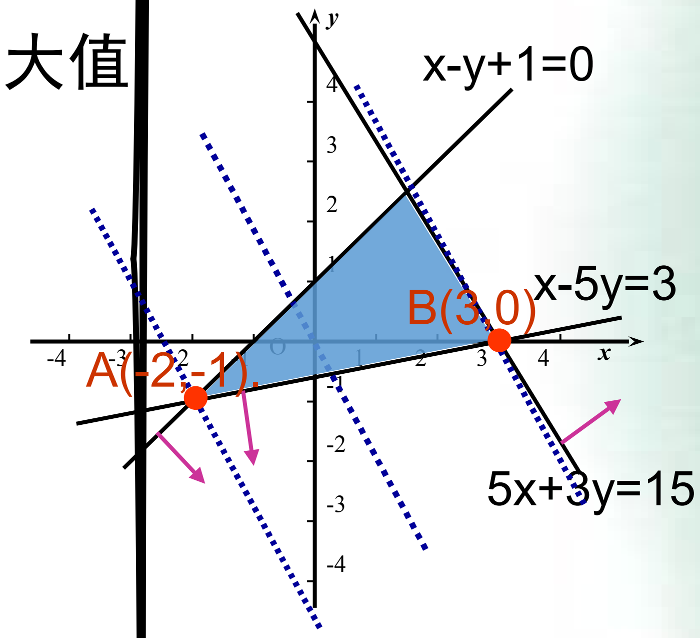
因为 A(4, 0), B(4, 6) 是满足条件的最优解，所以

zmin=2×4+4×0=8， zmax=2×4+4×6=32

练习

求线性目标函数 $z=4x+2y$ 的最大值和最小值，其中 x, y 满足线性约束条件

$$\begin{cases} 5x+3y \leqslant 15 \\ y \leqslant x+1 \\ x-5y \leqslant 3 \end{cases}$$



解：如图所示，$z=4x+2y$ 在点 A 取得最小值，点 B 取得最大值

因为点 A 是直线 $x-y+1=0$ 与直线 $x-5y-3=0$ 的交点

解方程组 $\begin{cases} x-5y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 即 $A(-2,-1)$

此时 $z_{min}=4\times(-2)+2\times(-1)=-10$

因为点 B 是直线 $x-5y-3=0$ 与直线 $5x+3y-15=0$ 的交点

解方程组 $\begin{cases} x-5y-3=0 \\ 5x+3y-15=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ 即 $B(3,0)$

此时 $z_{max}=4\times3+2\times0=12$

课堂小结

名称	意义
线性约束条件	由 x, y 的一次不等式（或方程）组成的不等式组，是对 x, y 的约束条件
目标函数	关于 x, y 的解析式
线性目标函数	关于 x, y 的一次解析式
可行解	满足线性约束条件的解（x, y）叫做可行解
可行域	所有可行解组成的集合叫做可行域
最优解	使目标函数达到最大值或最小值的可行解
线性规划问题	求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题

课堂小结

（一）线性规划问题的求解步骤：

（1）画：画出线性约束条件所表示的可行域，作出目标函数线；

（2）移：在线性目标函数所表示的一组平行线中，利用平移的方法找出与可行域有公共点且纵截距最大或最小的直线；

（3）求：通过解方程组求出最优解；

（4）答：把最优解代入目标函数求出最值.

（二）可行域

对于有实际背景的线性规划问题，可行域通常是一个凸多边形区域，此时变动直线的最佳位置一般通过这个凸多边形的顶点，因此，确定其最优解，往往只需考虑在各个顶点的情形，通过比较，即可得最优解。

作业　　P223　练习 19-3　1-3

谢谢观看！