

第十三章 圆锥曲线

13.1.1 椭圆的标准方程

授课教师：李辉

泰山护理职业学院



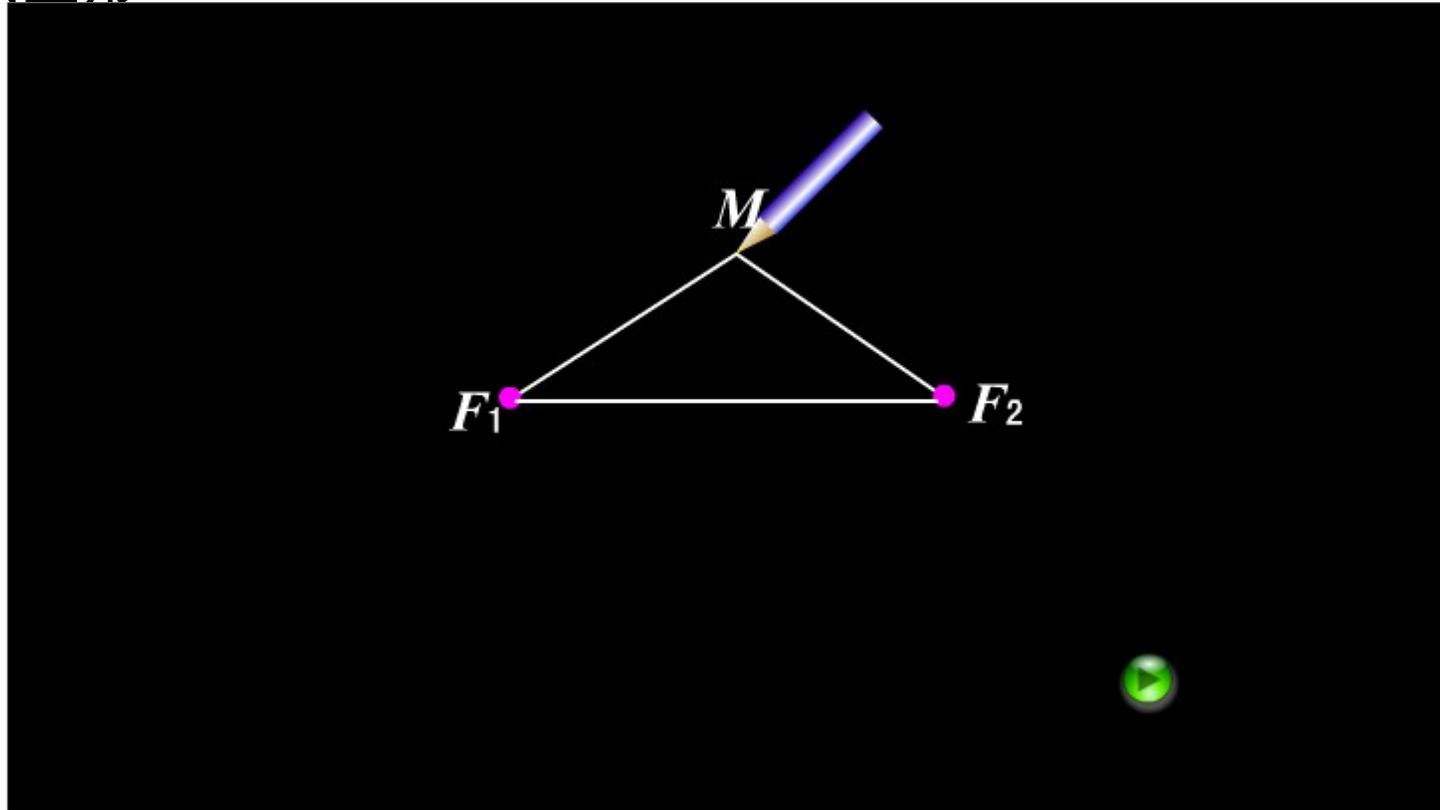
生活中的椭圆



如何精确地设计、建造出现实生活中这些椭圆形的物件呢？我们就需要知道椭圆的概念和性质

椭圆的画法

取一条一定长的细绳，把它的两端固定在画图板上的 F_1 和 F_2 两点，当绳长大于 F_1 和 F_2 的距离时，用笔尖把绳子拉紧，使笔尖在图板上慢慢移动，看看你会得到什么图形？



平面内到两个定点 F_1 、 F_2 的距离的和等于常数（记作 $2a$ ，大于 $|F_1F_2|$ ）的点的轨迹叫做椭圆，两个定点 F_1 、 F_2 叫做椭圆的焦点，两焦点的距离 $|F_1F_2|$ 叫做椭圆的焦距，记作 $2c$ 。

椭圆标准方程的推导:

① 建系: 以 F_1 和 F_2 所在直线为 x 轴, 线段 F_1F_2 的中点为原点 O 建立直角坐标系;

② 设点: 设 $M(x, y)$ 是椭圆上任意一点, 设 $|F_1F_2| = 2c$, 则 $F_1(-c, 0)$ $F_2(c, 0)$;

③ 列式: 由 $|MF_1| + |MF_2| = 2a$

得; $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

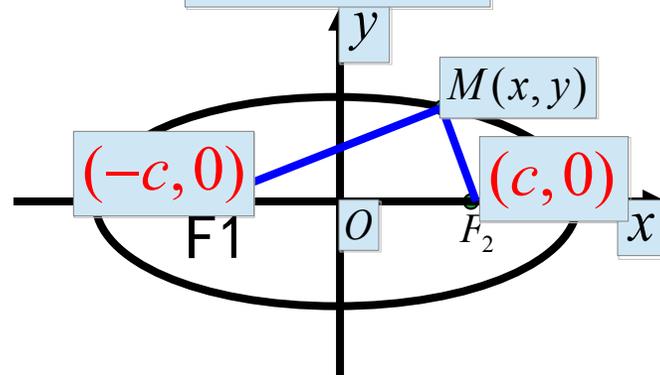
④ 化简: 整理得 $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

令 $b^2 = a^2 - c^2$, 得 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

两边除以 a^2b^2 , 得:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0).$$

椭圆标准方程



$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

3. 椭圆的标准方程：

焦点在 **x** 轴：
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

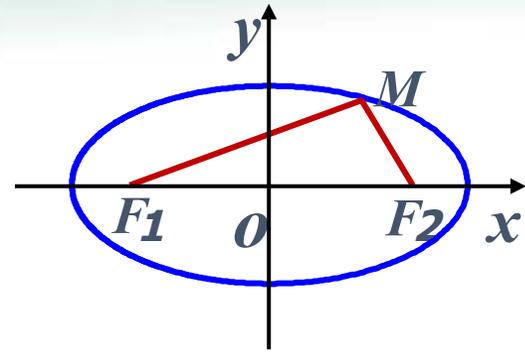
焦点在 **y** 轴：
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

大的分母叫 a^2 ，小的分母叫 b^2

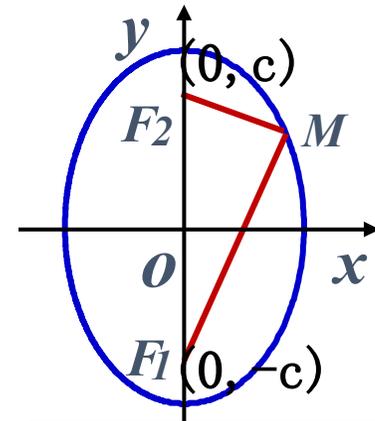
焦点在分母大的那个轴上

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$
 $a^2=25, b^2=16$, 焦点在 **x** 轴上

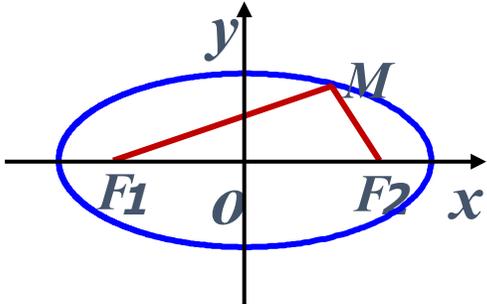
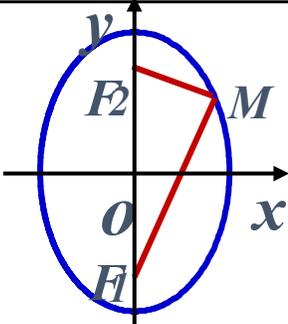
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$
 $a^2=25, b^2=9$, 焦点在 **y** 轴上



$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$



$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$

定 义	$ MF_1 + MF_2 =2a \quad (2a>2c>0)$	
图 形		
方 程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$
焦 点	$F(\pm c,$	$F(0, \pm$
a, b, c 之间的关系	$c^2 = a^2 - b^2$	

注：
：

共同点：椭圆的标准方程表示的一定是焦点在坐标轴上，中心在坐标原点的椭圆；方程的左边是平方和，右边是 1.

不同点：焦点在 x 轴的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 项分母较大。
焦点在 y 轴的椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ 项分母较大。

例 1 平面内两定点的距离是 8，求到这两定点的距离的和是 10 的点的轨迹方程。

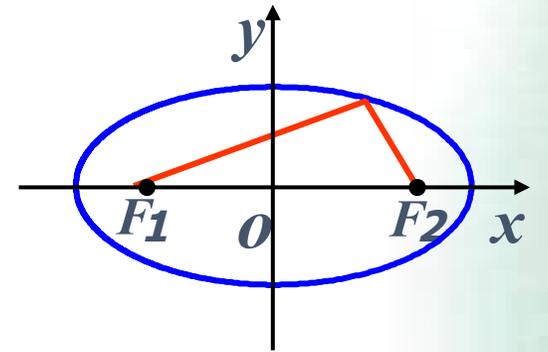
解：这个轨迹是一个椭圆.两个定点是焦点，用 F_1 表示
取过点 F_1 和 F_2 的直线为 x 轴， F_1F_2 线段的垂直平分线为 y 轴.

$$\text{由 } 2a = 10, 2c = 8 \quad a = 5 \quad c = 4.$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 9, \text{ 即 } b = 3.$$

因此，这个椭圆的标准方程是

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1, \text{ 即 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$



例 2 分别求椭圆 A: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 与椭圆 B: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点。

解：因为 $4 > 3$ ，所以椭圆 A 的焦点在 x 轴上，椭圆 B 的焦点在 y 轴上。因为 $a^2 = 4$, $b^2 = 3$ ，所以

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$$

因此椭圆 A 的两个焦点分别为 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ ，椭圆 B 的两个焦点分别为 $(0, -1)$ 和 $(0, 1)$

例3 已知椭圆的焦点在x轴上， $a=5$ ，而且椭圆经过点 $A(4, -\frac{3}{5})$ ，求椭圆的标准方程。

解：设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

因为椭圆经过点 $A(4, -\frac{3}{5})$ ，所以 $\frac{4^2}{5^2} + \frac{(-\frac{3}{5})^2}{b^2} = 1$

$$\text{即 } \frac{16}{25} + \frac{9}{25b^2} = 1$$

解得 $b^2=1$

所以这个椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$

练习

1、已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点 P 到椭圆一个焦点的距离为 3，

则 P 点到另一个焦点的距离为 (D)

A、 2

B、 3

C、 5

D、 7

练习

2. 写出适合下列条件的椭圆的标准方程

(1) $a=4$, $b=1$, 焦点在 x 轴

$$(1) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$$

(2) $a=4$, $c=3$, 焦点在 y 轴上

$$(2) \frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{7} = 1$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$$

练习

3. 判定下列椭圆的焦点在哪个轴，并指明 a^2 、 b^2 ，写出焦点坐标

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

答：在 X 轴。 (-3 , 0) 和
(3 , 0)

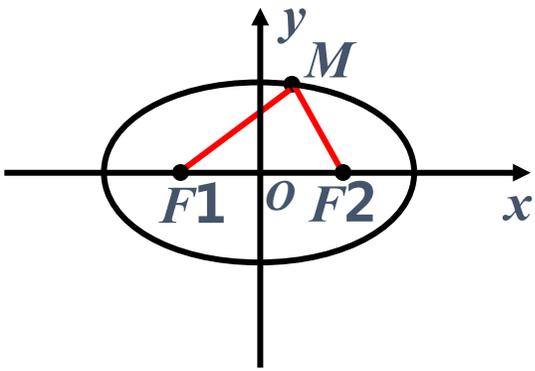
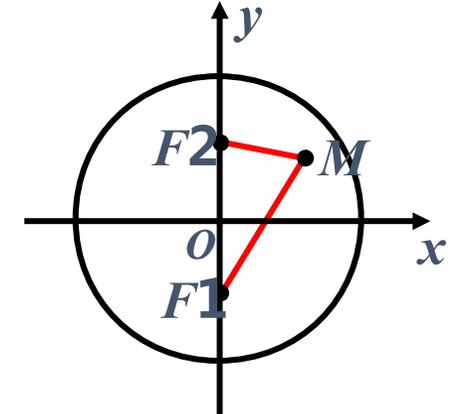
$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$$

答：在 y 轴。 (0 , -5) 和
(0 , 5)

判断椭圆标准方程的焦点在哪个轴上的准则：

焦点在分母大的那个轴上。

	定义	$ MF_1 + MF_2 = 2a \quad (2a > 2c)$	
不同点	图 形		
	标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$
	焦点坐标	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
相同点	a、b、c 的关系	$a^2 - c^2 = b^2 \quad (a > b > 0)$	
	焦点位置的判断	分母哪个大，焦点就在哪个轴上	

作业

P37 练习 1 - 5

谢谢观看！