21.2 二项式定理

21.2.2 二项式系数的性质

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots C_n^n b^n$$

$$(n \in N^*)$$

C_n^m 叫二项式系数

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m$$

通项公式

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots C_n^n b^n$$

$$C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$$

(a+b)1 → C_1^0 C_1^1

(a+b)2 → C_2^0 C_2^1 C_2^2

(a+b)3 → C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3

(a+b)4 → C_4^0 C_4^1 C_4^2 C_4^3 C_4^4

(a+b)5 → C_5^0 C_5^1 C_5^2 C_5^3 C_5^4 C_5^5

(a+b)6 C_6^0 C_6^1 C_6^2 C_6^3 C_6^4 C_6^5 C_6^6

(a+b)n→ Cn0 Cn1 Cn2 …Cn r … Cnn

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

这个表叫做二项式系数表，也称“杨辉三角”

表中的每一个数等于它肩上的两数的和

二项式系数的性质

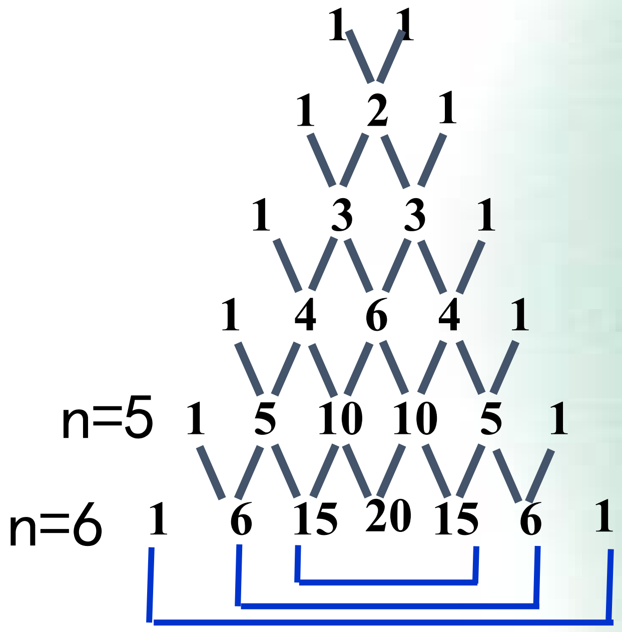
（1）除每行两端的1以外，每个数字都等于它肩上两个数字的和，即 $C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m-1}+C_{n}^{m}$

（2）与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等.

这一性质可直接由公式 $C_{n}^{m}=C_{n}^{n-m}$ 得到.

(3) n 是偶数时，二项展开式有奇数项，中间的一项（T= $\frac{n}{2}+1$ ）的二项式系数最大；

n 是奇数时，二项展开式有偶数项，中间的两项（T= $\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2}$ ）的二项式系数相等并且最大。



课堂练习

1、在（a＋b）６展开式中，与倒数第三项二项式系数相等是B(　　)

A　第２项　　B　第３项　　C　第４项　　D　第５项

2、若（ a+b ） n 的展开式中，第三项的二项式系数与第五项的二项式系数相等，则 n=___6_____

$C_n^2 = C_n^4$　　n=2+4=6

$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m$　　$C_n^m = C_n^{n-m}$

3. 在 (1+x)10 的展开式中，二项式系数最大的项为__6____;

4. 在 (1-x)11 的展开式中，二项式系数最大的项为6 、7____.

n 为偶数时二项式系数最大的项为 $\frac{n}{2}+1=5+1=6$

n 为奇数时二项式系数最大的项为 $\frac{n+1}{2}=6, \frac{n+3}{2}=7$

例 6　求（1+x)8 的展开式中二项式系数最大的项

解：已知二项式幂指数是偶数 8，展开式共有 9 项，依二项式系数性质，中间一项的二项式系数最大，所以要求的系数最大项为

$$T_5 = C_8^4 x^4 = 70x^4$$

例 7　求证 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

证明：运用（1+x)n 的展开式

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^m x^m + \cdots + C_n^n x^n$$

设 x=1，则得 $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$

结论 $(a+b)^n$ 的展开式的所有二项式系数的和等于 2^n

例 8　证明：在 (a + b)n 展开式中，奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和．

即证：$C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots$

1　3　2　4

证明　$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots C_n^n b^n$

令 a=1, b=−1 得

$(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

$C_n^0 + C_n^2 +$ 鬃□$+ C_n^1 + C_n^3$ 鬃

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

$C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = \dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1}$

课堂练习

1. $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n =$ __$2^n - 1$__;

2. $C_{11}^1 + C_{11}^3 + C_{11}^5 + C_{11}^7 + C_{11}^9 + C_{11}^{11} =$ __2^{10}__.

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$$

课堂练习

3. 在 $(a+b)^{10}$ 展开式中，二项式系数最大的项是（ A ）.

A 第 6 项 B 第 7 项 C 第 6 项和第 7 项 D 第 5 项和第 7 项

4. 在 $(a+b)^{11}$ 展开式中，二项式系数最大的项是（ C ）.

A 第 6 项 B 第 7 项 C 第 6 项和第 7 项 D 第 5 项和第 7 项

课堂小结

二项式系数的性质

（1）除每行两端的1以外，每个数字都等于它肩上两个数字的和，

即 $C_{n+1}^{m}=C_n^{m-1}+C_n^{m}$

（2）与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等.

这一性质可直接由公式 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 得到.

(3) n 是偶数时，二项展开式有奇数项，中间的一项（T=　　）的二项式系数最大；

$\frac{n}{2}+1$

n 是奇数时，二项展开式有偶数项，中间的两项（T=　　）的二项式系数相等并且最大；

$\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2}$

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

n=5 1 5 10 10 5 1

n=6 1 6 15 20 15 6 1

重要结论

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$$

$$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots=2^{n-1}$$

布置作业