21.1 排列与组合

21.1.2　　组合与组合数公式

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

复 习

(1) 排列的定义：从 n 个不同的元素中任取 m ($m\leqslant n$) 个元素，按照一定顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列．

(2) 排列数的定义： 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有排列的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数， 用符号 A_n^m 表示． 其中 n， $m\in N^*$ ，并且 $m\leqslant n$．

(3) 排列数公式：

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}(m \leqslant n, n, m \in N)$$

当 m=n 时，排列称为全排列，排列数为 $A_n^n = n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$

记为 n!， 且规定 0!=1

情境导入

问题 3：甲、乙、丙 3 个足球队进行单循环比赛，共需比赛多少场?

从 3 个足球队中选出 2 个队，不同的比赛有 3 场：

甲与乙　　　乙与丙　　　甲与丙

这个问题与问题 1 的区别在于是否分主客场，这里没有主客场的顺序之分，甲与乙的比赛和乙与甲的比赛是同一场比赛，是一组。这个问题是求一共有多少个不同的组，这就是组合的问题。

1. 组合的有关定义

一般地，从 n 个不同的元素中取出 m(m≤n) 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

从 n 个不同的元素中取出 m(m≤n) 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的组合数。

C_n^m 用符号表示。

2. 比较排列与组合

组合定义：一般地，从 n 个不同元素中取出 m （$m \leqslant n$）个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

排列定义：一般地说，从 n 个不同元素中，取出 m（m≤n）个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

思考：排列与组合的概念，它们有什么共同点、不同点?

共同点：都要“从 n 个不同元素中任取 m 个元素”

不同点：对于所取出的元素，排列要“按照一定的顺序排成一列”，而组合却是“不管怎样的顺序并成一组”.

排列与元素的顺序有关，而组合则与元素的顺序无关

想一想：ab 与 ba 是相同的排列还是相同的组合？为什么？

例　下面的问题是排列问题？还是组合问题？

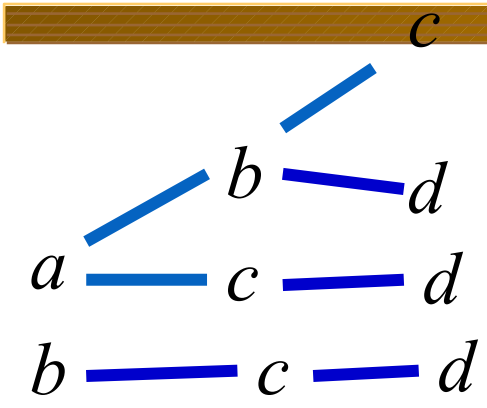
（1）从1，3，5，7中任取两个数相加，可以得到多少个不同的和？ 组合问题

（2）从1，3，5，7中任取两个数相除，可以得到多少个不同的商？ 排列问题

（3）10个同学毕业后互相通了一次信，一共写了多少封信？ 排列问题

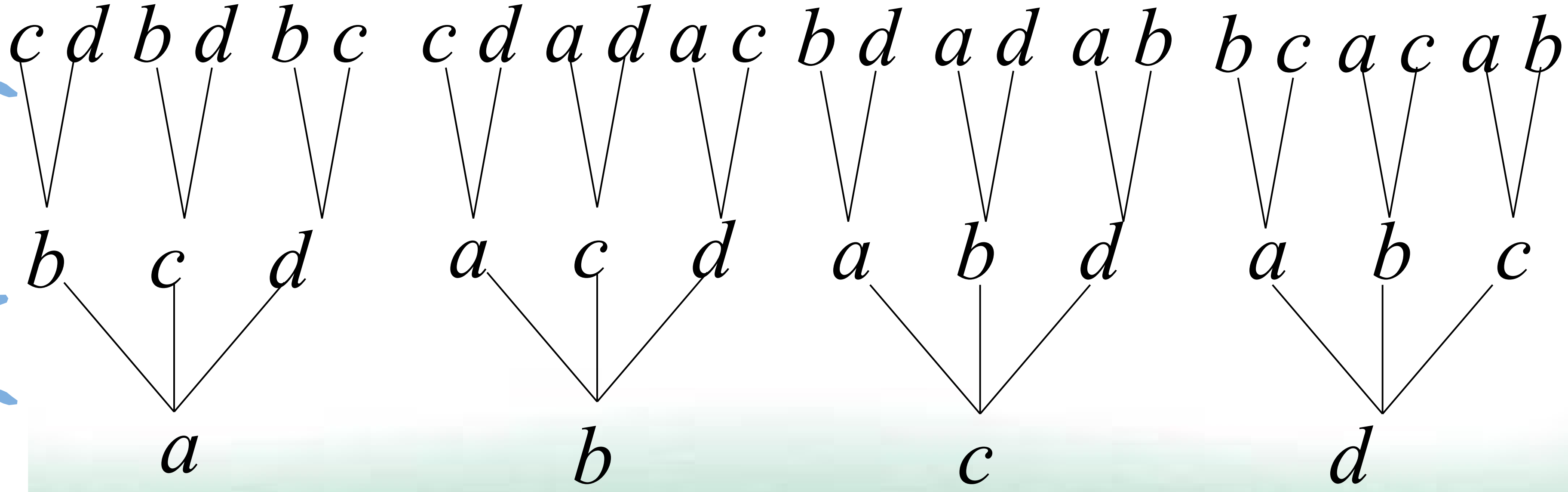
（4）10个同学毕业后见面时，互相握了一次手，共握了多少次手？ 组合问题

问题 4　从 4 个不同元素 a, b, c, d 中任取 3 个元素的排列数与组合数有什么关系？



abc ，　abd ，　acd ，
bcd .

写出从 a, b, c, d 四个元素中任取三个元素的所有排列 .



所有的排列为：

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

$$A_4^3 = 4\times3\times2 = 24$$

组合	排列		
abc	[redacted]	*bac*	*cab*
	[redacted]	*bca*	*cba*
abd	[redacted]	*bad*	*dab*
	[redacted]	*bda*	*dba*
acd	[redacted]	*cad*	*dac*
	[redacted]	*cda*	*dca*
bcd	[redacted]	*cbd*	*dbc*
	[redacted]	*cdb*	*dcb*

求 A_4^3 可分两步考虑：

第一步，C_4^3 （$=4$）个；

第二步，A_3^3 （$=6$）个；

根据分步计数原理，$A_4^3 = C_4^3 \cdot A_3^3$.

从而 $C_4^3 = \dfrac{A_4^3}{A_3^3}$

3. 组合数公式

从 n 个不同元中取出 m 个元素的排列数 $A_n^m = C_n^m A_m^m$

组合数公式：

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

例 4 计算（1） C_{10}^4与C_{10}^6 $C_7^3+C_7^4$与C_8^4

解：（1） 由组合数公式得:

$$C_{10}^4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

$$C_{10}^6=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=210$$

$$C_{10}^4=C_{10}^6 \longrightarrow C_n^m=C_n^{n-m}$$

组合数性质 1

(2) $$C_7^3+C_7^4=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}+\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35+35=70$$

$$C_8^4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

$$C_7^3+C_7^4=C_8^4 \longrightarrow C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$$

组合数性质 2

4. 组合数性质：

（1）$C_n^m = C_n^{n-m}$ ；

（2）$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

$$C_{99}^{97}+C_{99}^{98}=C_{100}^{98}=C_{100}^{2}=\frac{100 \quad 99}{2 \quad 1}=4950$$

例 5　平面内有 12 个点，其中任意 3 点都不在同一条直线上，以任意 3 点为顶点画三角形，一共可画多少个三角形？

解：因为平面内的 12 个点中任意 3 点都不在同一条直线上，所以，任意 3 点做顶点都可以构成一个三角形，所画三角形的个数，就是从 12 个元素中取出 3 个元素的组合数，即

$$C_{12}^{3}=\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1}=220$$

例 6　在产品质量检验时，常从产品中抽出一部分进行检查．现有 100 件产品，其中有 98 件正品， 2 件次品，从中任意抽出 3 件检查，问：

(1) 一共有多少种不同的抽法？

(2) 抽出的 3 件中恰好有一件是次品的抽法有多少种？

(3) 抽出的 3 件中至少有一件是次品的抽法有多少种

(4) 抽出的 3 件中恰好有一件次品的概率是多少？

(5) 抽出的 3 件中至少有一件是次品概率是多少？

100 件 $\begin{cases} 正品 & 98 \\ 次品 & 2 \end{cases}$

解： 从 98 件正品和 2 件次品共 100 件产品中抽取 3 件产品进行检查，所抽取的产品与次序无关，因此是一个组合问题．

(1) 所求的不同抽法数，即从 100 个不同元素中任取 3 个元素的组合数，共有

$$C_{100}^{3}=\frac{100\times 99\times 98}{3\times 2\times 1}=161700$$

例 6　在产品质量检验时，常从产品中抽出一部分进行检查．现有 100 件产品，其中有 98 件正品，2 件次品，从中任意抽出 3 件检查，问：

(2) 抽出的 3 件中恰好有一件是次品的抽法有多少种？

$$100\text{件}\begin{cases}\text{正品} & 98\\ \text{次品} & 2\end{cases}$$

解：(2) 抽出的 3 件中恰好有一件是次品的这件事，可以分两步完成．

第一步：从 2 件次品中任取 1 件，有 C_2^1 种方法；

第二步：从 98 件正品中任取 2 件，有 C_{98}^2 种方法．

根据分步乘法计数原理知，不同的抽取方法共有

$C_2^1 \cdot C_{98}^2$ =2×4753=9506（种）.

例 6　在产品质量检验时，常从产品中抽出一部分进行检查．现有 100 件产品，其中有 98 件正品， 2 件次品，从中任意抽出 3 件检查，问：

(3) 抽出的 3 件中至少有一件是次品的抽法有多少种

100 件 次品 2

正品 98

(3) 解法一：抽出的 3 件中至少有一件是次品，这件事分为两类．

$$C_2^1 \cdot C_{98}^2 + C_2^2 \cdot C_{98}^1$$ =9506+98=9604(种).

次品	正品
1	2
2	1
0	3

解法二：从 100 件产品中任取 3 件的所有抽法中，除抽出 3 件都是合格品的抽法外，剩下的就是至少有 1 件次品的抽法

共有 $C_{100}^3 - C_{98}^3$ 1700−152096 =9604(种).

例 6　在产品质量检验时，常从产品中抽出一部分进行检查．现有 100 件产品，其中有 98 件正品， 2 件次品，从中任意抽出 3 件检查，问：

（4）抽出的 3 件中恰好有一件次品的概率是多少？

100 件 正品 98
次品 2

解：（4） 记“抽出的 3 件恰有 1 件次品”为事件 A，则

抽出的 3 件中恰好有一件次品的概率是

$$P(A)=\frac{C_2^1\cdot C_{98}^2}{C_{100}^3}=\frac{9506}{161700}=\frac{4753}{80850}$$

例 6　在产品质量检验时，常从产品中抽出一部分进行检查．现有 100 件产品，其中有 98 件正品， 2 件次品，从中任意抽出 3 件检查，问：

(5) 抽出的 3 件中至少有一件是次品概率是多少？

100 件 正品 98 次品 2

解：(5) 记“抽出的 3 件至少有 1 件次品”为事件 B, 则

抽出的 3 件中至少有一件是次品概率是

$$P(B)=\frac{C_2^1\cdot C_{98}^2+C_2^2\cdot C_{98}^1}{C_{100}^3}=\frac{9604}{161700}=\frac{49}{825}$$

答：(1) 一共有 161700 种不同的抽法；

(2) 抽出的 3 件中恰好有一件是次品的抽法有 9506 种；

(3) 抽出的 3 件中至少有一件是次品的抽法有 9604 种；

(4) 抽出的 3 件中恰好有一件次品的概率是 $\frac{4753}{80850}$；

(5) 抽出的 3 件中至少有一件是次品概率是 $\frac{49}{825}$。

课堂小结

（1）组合的定义：从n个不同的元素中取出m（m≤ n）个元素合并成一组叫做从n个不同的元素中取出 m（m≤n）个元素的一个组合．

（2）组合数的定义：从n个不同的元素中取出m（m ≤n）个元素的所有不同组合的个数，叫做从n个不同的元素中取出m（m≤n）个元素的组合数，用 C_n^m 表示．

（3）$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

（4）组合数的性质：① $C_n^m = C_n^{n-m}$；② $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

作业

P281　练习　1 - 7

谢谢观看！