19.4 线性规划问题的应用举例

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

例1　营养学家指出，成人良好的日常饮食应该至少提供 0.075kg 的碳水化合物，0.06kg 的蛋白质，0.06kg 的脂肪，1kg 食物 A 含有 0.105kg 碳水化合物，0.07kg 蛋白质，0.14kg 脂肪，花费 28 元；而 1kg 食物 B 含有 0.105kg 碳水化合物，0.14kg 蛋白质，0.07kg 脂肪，花费 21 元。为了满足营养专家指出的日常饮食要求，同时使花费最低，需要同时食用食物 A 和食物 B 多少 kg？

分析：将已知数据列成表格

食物／kg	碳水化合物 kg	蛋白质 kg	脂肪 kg	花费（元）
A	0.105	0.07	0.14	28
B	0.105	0.14	0.07	21
成人日常需要	0.075	0.06	0.06	

食物 / kg	碳水化合物 kg	蛋白质 kg	脂肪 kg	花费（元）
A	0.105	0.07	0.14	28
B	0.105	0.14	0.07	21
成人日常需要	0.075	0.06	0.06	

解　设每天食用 xkg 食物 A， ykg 食物 B，总成本为 z，则线性约束条件为：

$$\begin{cases} 0.105x+0.105y \geq 0.075 \\ 0.07x+0.14y \geq 0.06 \\ 0.14x+0.07y \geq 0.06 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+7y \geq 5 \\ 7x+14y \geq 6 \\ 14x+7y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

目标函数为： $z=28x+21y$

作出二元一次不等式组所表示的平面区域，即可行域

把目标函数 $z = 28x + 21y$ 变形为

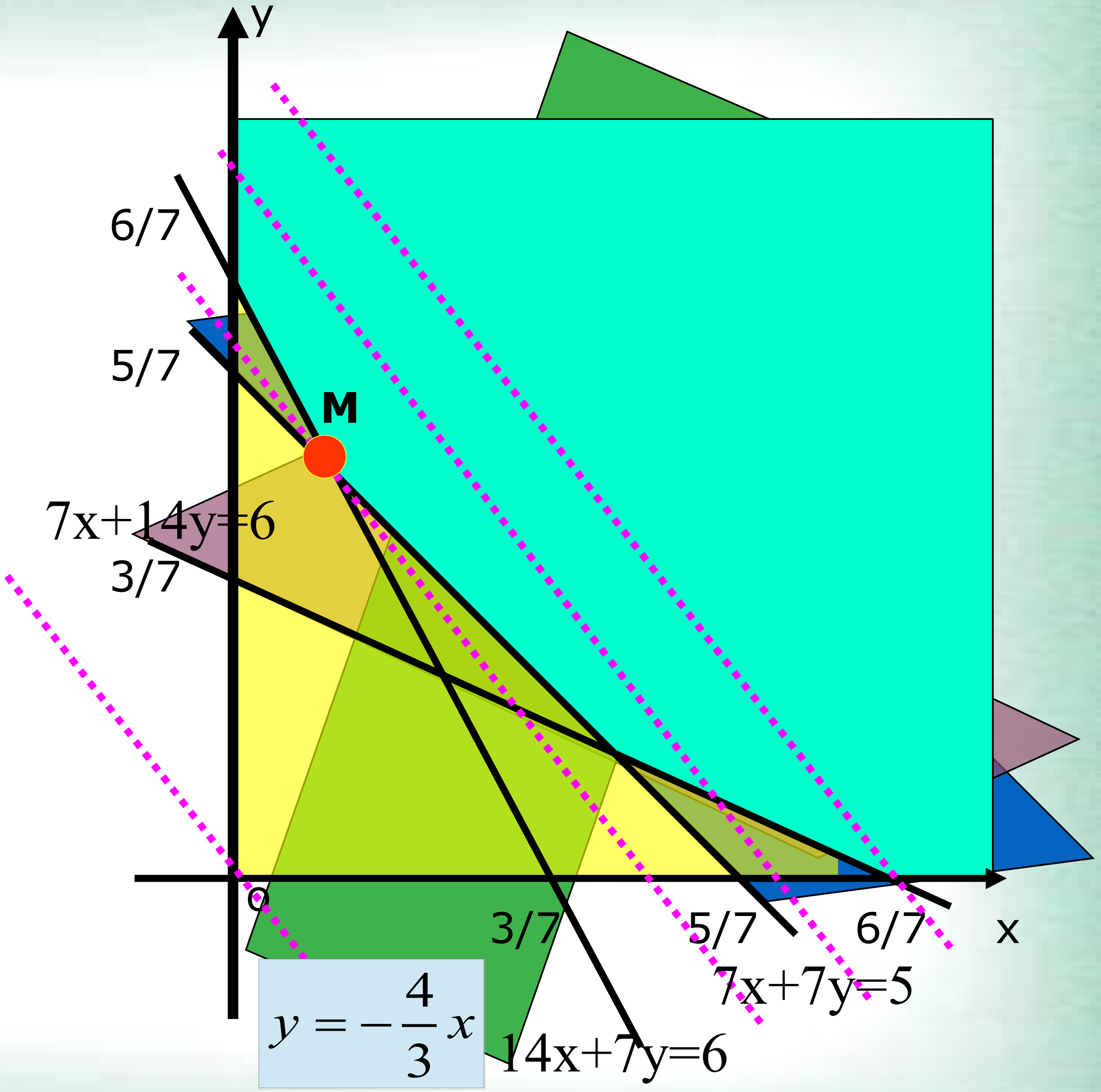
$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{z}{28}$$

它表示斜率为 $-\frac{4}{3}$

随 z 变化的一组平行直线系，

$\frac{z}{28}$ 是直线在 y 轴上的截距，当截距最小时， z 的值最小.

如图可见，当直线 $z = 28x + 21y$ 经过可行域上的点 M 时，截距最小，即 z 最小.



M 点是两条直线的交点，解方程组 $\begin{cases} 7x+7y=5 \\ 14x+7y=6 \end{cases}$

得 M 点的坐标为： $\begin{cases} x=\dfrac{1}{7}\approx 0.143 \\ y=\dfrac{4}{7}\approx 0.571 \end{cases}$

所以 zmin = 28x + 21y = 28×(1/7)+12×(4/7)=16

由此可知，每天食用食物 A143g，食物 B 约 571g，能够满足日常饮食要求，又使花费最低，最低成本为 16 元.

例 2. 一个化肥厂生产甲、乙两种混合肥料，生产 1 车皮甲种肥料的主要原料是磷酸盐 4 吨、硝酸盐 18 吨，获利 10 万元；生产 1 车皮乙种肥料的主要原料是磷酸盐 1 吨、硝酸盐 15 吨，获利 8 万元。现库存磷酸盐 10 吨、硝酸盐 90 吨，在此基础上生产这两种混合肥料至少各一车皮，问甲、乙两种肥料各生产几车皮，才能获得最大的收益？

分析：将数据列表

	磷酸盐	硝酸盐	获利
甲肥	4	18	10
乙肥	1	15	8
库存	10	90	

解：设计划生产甲种肥料的车皮数为 x，乙种肥料的车皮数为 y，获得的收益为 z 万元，则线性约束条件为

$$\begin{cases} 4x+y\le 10 \\ 18x+15y\le 90 \\ x\ge 1, x\in z \\ y\ge 1, y\in z \end{cases}$$

线性目标函数为 $z=10x+8y$

线性目标函数为 z=10x+8y

在直角坐标系中画出线性约束条件所表示的可行域，并在可行域内找出横坐标和纵坐标都是整数的点。

将目标函数变形为 $y=-\frac{5}{4}x+\frac{z}{8}$

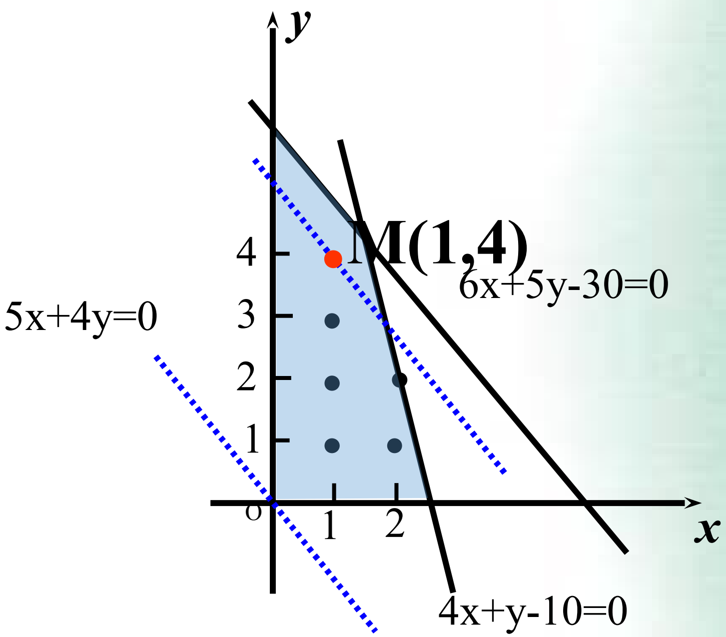
当 $\frac{z}{8}$ 取最大值时，z 取得最大值。

$4x+y\leq 10$

$18x+15y\leq 90$

$x\geq 1, x\in z$

$y\geq 1, y\in z$



令 z=0，画出直线 10x+8y=0，即 5x+4y=0，然后平移这条直线，当直线经过点 M(1，4）时，z 取得最大值，此时 zmax=10×1+8×4=42（万元）

即化肥厂生产 1 车皮甲种混合肥料，4 车皮乙种混合肥料，该厂可获得最大收益 42 万元。

线性规划问题的求解步骤：

（1）审：审题（将题目中数据列表），将实际问题转化为数学问题；

（2）设：设出变量，确定约束条件，建立目标函数；

（3）画：画出线性约束条件所表示的可行域，作出目标函数线；

（4）移：在线性目标函数所表示的一组平行线中，利用平移的方法找出与可行域有公共点且纵截距最大或最小的直线；

练习 19-4

1. 某校计划用 2000 元购买单价为 50 元的桌子和 20 元的凳子，希望使桌凳的总数尽可能的多，但凳子数不少于桌子数，且凳子数不多于桌子数的 1.5 倍，问桌子和凳子各买多少才行?

解：设买桌子 x 个，买凳子 y 个，桌凳总数为 z，则线性约束条件为

$$\begin{cases} 50x+20y\le 2000 \\ y\ge x \\ y\le 1.5x \\ x\in N+ \\ y\in N+ \end{cases}$$

目标函数为 z=x+y

画出线性约束条件所表示的可行域，作出目标函数线

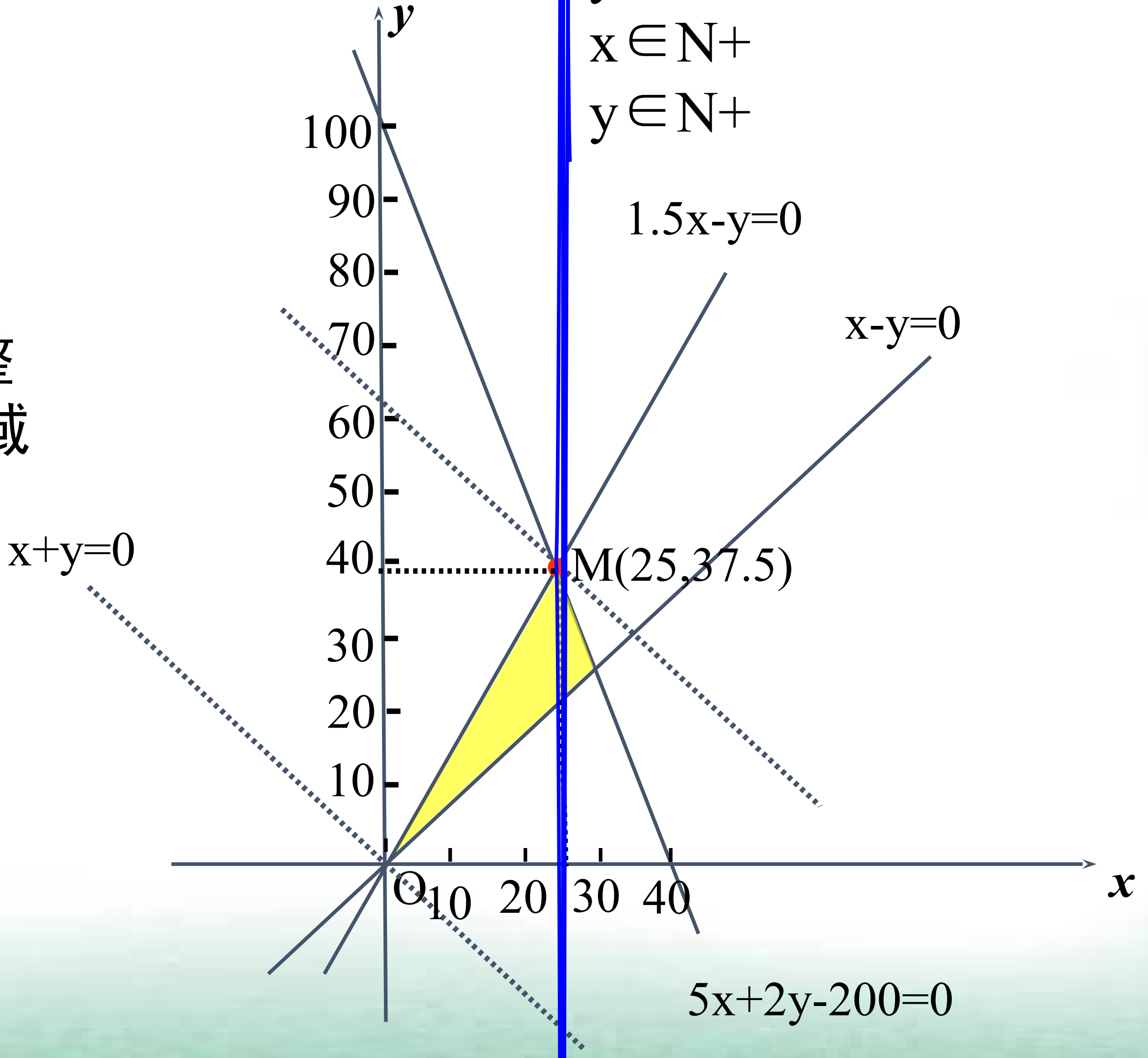
目标函数为 z=x+y

$y = -x + z$

点 M 是直线 5x−2y−200=0 与直线 1.5x−y=0 的交点，联立方程组解得 x=25, y=37.5，但 y 取正整数值，且 y 取值要在可行域内，所以 y 取值 37

即当 x=25, y=37 时，z 取最大值，即此时购买的桌凳数最多。

$$\begin{cases} 50x+20y\le 2000 \\ y\ge x \\ x\in N+ \\ y\in N+ \end{cases}$$



作业

P226　练习 19-4 1-5

谢谢观看！