

第十二章 三角计算及其应用

12.4.1 余弦定理

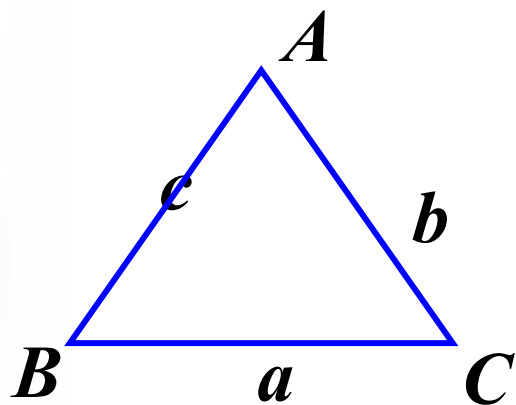
授课教师：李辉

泰山护理职业学院



三角形的元素

在 $\triangle ABC$ 中，有三个角 A, B, C ，对边分别为 a, b, c 。



三角形 6 个元素：三条边 三个内角

一般地，把三角形的三个角 A, B, C 和它们的对边 a, b, c 叫做三角形的元素，由三角形的已知元素求未知元素的过程叫做解三角形。

余弦定理的推导

如图已知在 $\triangle ABC$ 中, $AC=b, AB=c$,
边 AC 和边 AB 的夹角为 A , 求边

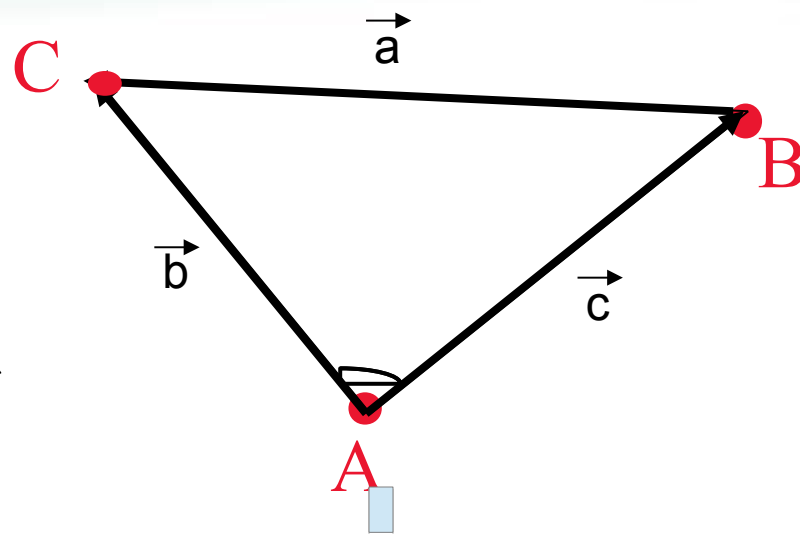
BC

设 $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, $\vec{BC} = \vec{a}$, 那么

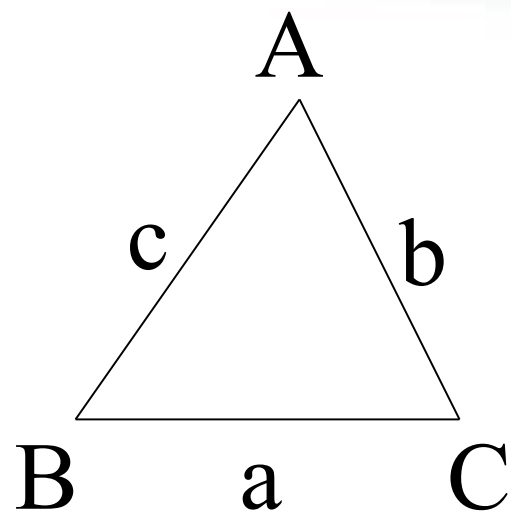
$$\vec{BC} = \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{c} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

即 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$



余弦定理：

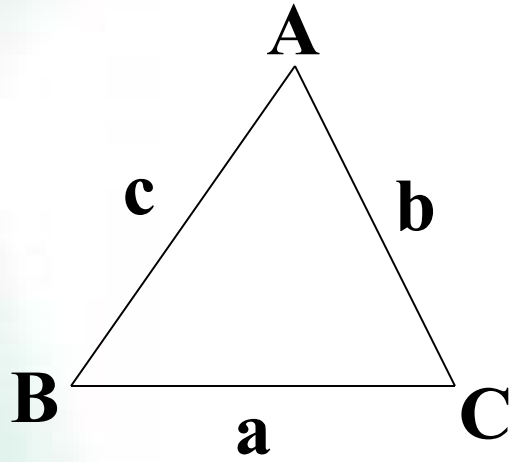


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

三角形任何一边长的平方等于其他两边长的平方和减去这两边的长与它们的夹角的余弦积的 2 倍。



变一变乐在其中

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

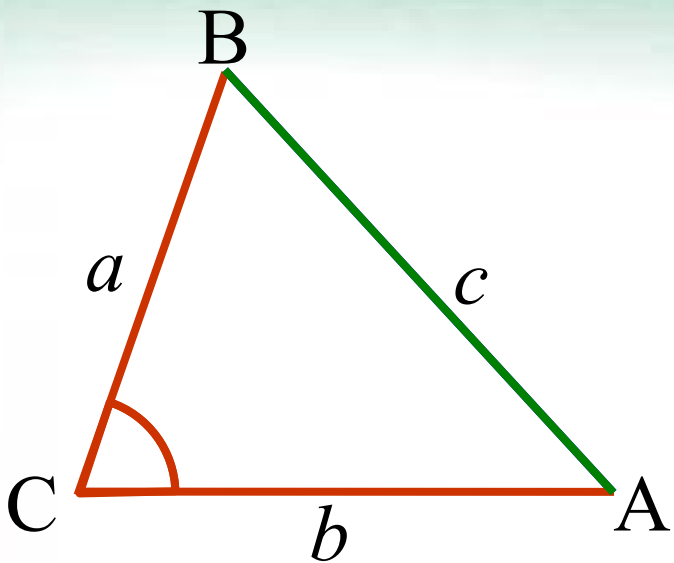
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



余弦定理可以解决以下两类有关三角形的问题：

- (1) 已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角。
- (2) 已知三边求三个角。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

例 1. 已知 $\triangle ABC$ 中 , $a=6$, $b=3$, $\angle C=120^\circ$, 求三角形的其他元素。

解：由 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

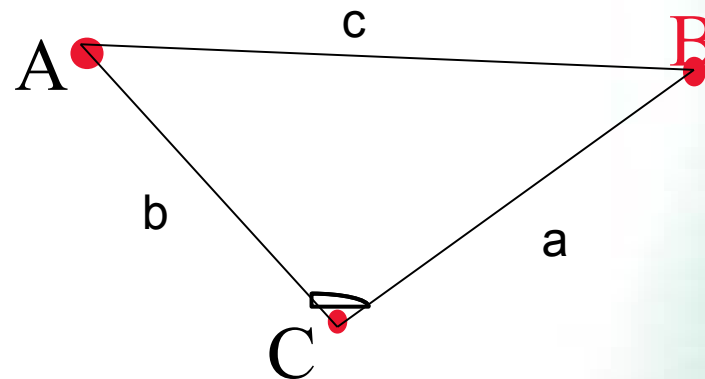
$$= 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 63$$

得 $c = 3\sqrt{7}$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 63 - 6^2}{2 \times 3 \times \sqrt{63}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$\therefore$ 利用计算器计算 , 得 $\angle A \approx 40^\circ 54'$

$$\therefore B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (40^\circ 54' + 120^\circ) \approx 19^\circ 6'$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

例 2. 已知 $\triangle ABC$ 的三边 $a=5$, $b=7$, $c=4$, 求 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 。

解：

$$\ominus \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 4^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 4} = \frac{5}{7}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 4^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 4} = -0.2$$

$$\therefore \angle A \approx 44^\circ 25' \quad \angle B \approx 101^\circ 32'$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - (A+B) \approx 180^\circ - (44^\circ 25' + 101^\circ 32') \approx 34^\circ 3'$$

例 3. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=60^\circ$, 求证: $b^2-c^2=a(a-c)$

证明：由余弦定理，得

$$\begin{aligned}b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\&= a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ \\&= a^2 + c^2 - ac\end{aligned}$$

所以 $b^2 - c^2 = a^2 - ac = a(a - c)$

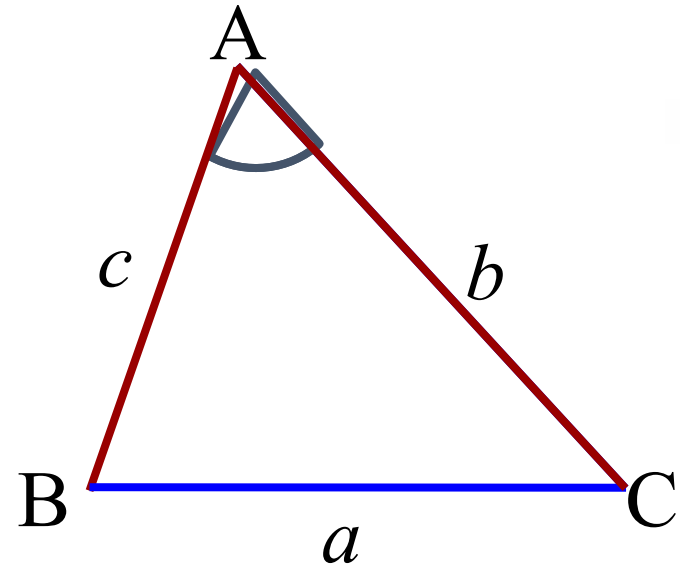
练习 12-6 5

练习

1. 已知 $b=8, c=3, A=60^\circ$, 求 a .

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 64 + 9 - 2 \times 8 \times 3 \cos 60^\circ \\ &= 49 \end{aligned}$$

$$a = 7.$$



练习

2. 已知 $\triangle ABC$ 的三边为 $\sqrt{7}$ 、2、1，求它的最大内角。

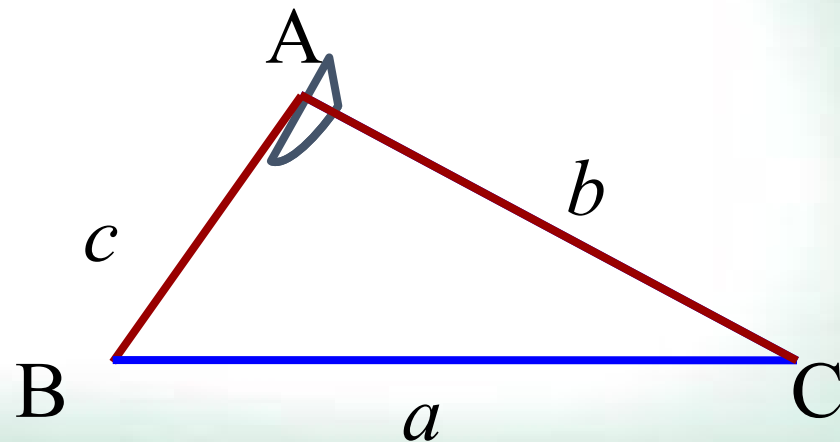
解：不妨设三角形的三边分别为 $a=\sqrt{7}$ ， $b=2$ ， $c=1$

则最大内角为 $\angle A$

由余弦定理

$$\cos A = \frac{1^2 + 2^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times 2 \times 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore A = 120^\circ$$



练习

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $b\cos A = a\cos B$, 则三角形为()

- A. 直角三角形 B. 锐角三角形
C. 等腰三角形 D. 等边三角形

解：利用余弦定理将角化为边.

$$\because b\cos A = a\cos B, \therefore b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\therefore b^2 + c^2 - a^2 = a^2 + c^2 - b^2, \therefore a^2 = b^2, \therefore a = b,$$

故此三角形是等腰三角形.

练习

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 5$, $b = 6$, $c = 8$, $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 都有可能

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{25 + 36 - 64}{2 \times 5 \times 6} = -\frac{1}{20} < 0$$



1. 余弦定理：三角形任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

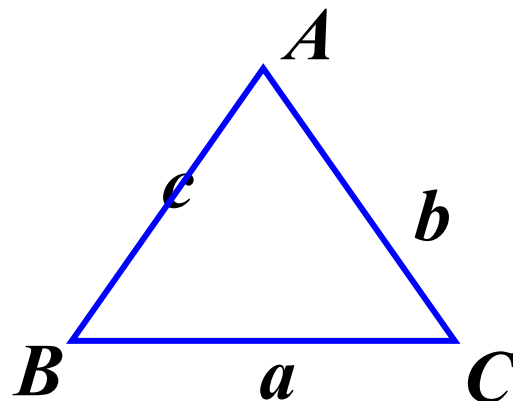
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



2. 余弦定理的作用

(1) 已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角。

(2) 已知三边求三个角；

作业布置

P18 1-5

