我们考察事物时，往往要进行大小、轻重、长短的比较. 在数学中，我们经常应用等式和不等式的知识来研究这类问题. 在这一章里，我们将学习方程和不等式的解法，并应用集合表示不等式的解集.

2.1 一元二次方程

问题 如图 2-1，现有长方形纸片一张，长 20 cm，宽 14 cm，在其四个角上各剪去一个边长相等的小正方形，然后把四边折起，如果恰好能将其做成底面积是 72 cm^2 的无盖长方体纸盒. 求剪去的小正方形边长是多少？

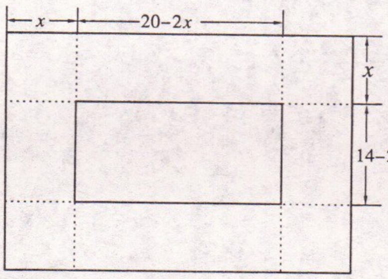

图 2-1

分析：设需要剪去小正方形的边长是 x cm，则盒子底面长方形的长是 $(20-2x)$cm，宽是 $(14-2x)$cm. 根据题意，列出方程

$$(20-2x)(14-2x)=72.$$

化简，得

$$x^2-17x+52=0. \qquad ①$$

再求出 x 即可.

像①这样只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做**一元二次方程**. 关于未知数 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c 是常数，且 $a\neq0$）是一元二次方程的一般形式. a，b，c 依次称为方程的二次项系数，一次项系数和常数项.

能够使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做**方程的解**.

求出方程的解或者确定方程无解的过程，叫做**解方程**.

下面我们用初中学过的配方法来解一元二次方程.

例　用配方法解一元二次方程：

(1) $x^2+2x-3=0$；　　(2) $x^2-4x-3=0$；

(3) $2x^2-5x-3=0$；　　(4) $x^2-6x+10=0$.

解：(1) 移项，得 $x^2+2x=3$，配方，得

$$x^2+2x+1^2=3+1^2,$$

即 $(x+1)^2=4$. 开平方，得

$$x+1=-2 \text{ 或 } x+1=2.$$

解得 $x_1=-3$，$x_2=1$.

所以原方程的两个根为 -3，1.

(2) 移项，得 $x^2-4x=3$，配方，得

$$x^2-4x+2^2=3+2^2,$$

即 $(x-2)^2=7$. 开平方，得

$$x-2=-\sqrt{7} \text{ 或 } x-2=\sqrt{7}.$$

解得 $x_1=2-\sqrt{7}$，$x_2=2+\sqrt{7}$.

所以原方程的两个根为 $2-\sqrt{7}$，$2+\sqrt{7}$.

(3) 方程两边都除以 2，得 $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$，移项，得

$$x^2-\frac{5}{2}x=\frac{3}{2},$$

配方，得

$$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{3}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

即 $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$. 开平方，得

$$x-\frac{5}{4}=-\frac{7}{4} \text{ 或 } x-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}.$$

解得 $x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=3$.

所以原方程的两个根为 $-\frac{1}{2}$，3.

(4) 移项，得 $x^2-6x=-10$，配方，得

$$x^2-6x+3^2=-10+3^2,$$

即$(x-3)^2=-1$.

所以原方程无实数解.

议一议 配方的关键是什么？

一般地，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$用配方法可变形为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

讨论：(1) 当判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，解方程，得

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

这就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的**求根公式**.

想一想 为什么要讨论 b^2-4ac 大于零，小于零，等于零？

(2) 当判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，解方程，得

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

为原方程两个相等的根；

试一试 请你解决本节开始提出的问题.

(3) 当判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，原方程无实数根.

练习 2-1

1. 说出下列一元二次方程的根：

(1) $x^2=4$；　(2) $x(x-3)=0$；

(3) $(x+1)(x-2)=0$；　(4) $(x-1)^2=0$；

(5) $x^2+1=0$；　(6) $(x+3)^2=-2$.

2. 用配方法解下列一元二次方程：

(1) $x^2+6x+7=0$；　(2) $x^2-7x-8=0$；