

## 第九章 直线与圆的方程

### 9.4.1 圆的标准方程

授课教师：李辉

泰山护理职业学院



例 2 求过点  $A(0, 1)$  ,  $B(2, 1)$  且半径  $\sqrt{5}$  的圆的方程

解：设圆心坐标为  $(a, b)$  , 则圆的方程为  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 5$

依题意得 
$$\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = 5 \\ (2-a)^2 + (1-b)^2 = 5 \end{cases}$$

解此方程组得 
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

所求圆的方程为  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$  或  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$



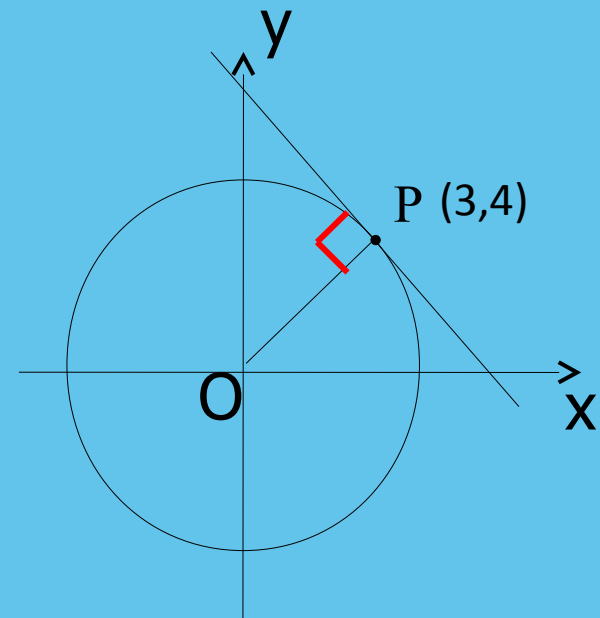
例3 已知圆的方程是  $x^2+y^2=25$ ，求经过圆上一点  $P(3,4)$  的切线方程

解： $\overrightarrow{OP} = (3,4)$  是切线的一个法向量

由直线的点法式方程，得

$$3(x-3)+4(y-4)=0$$

所以所求切线方程为： $3x+4y-25=0$



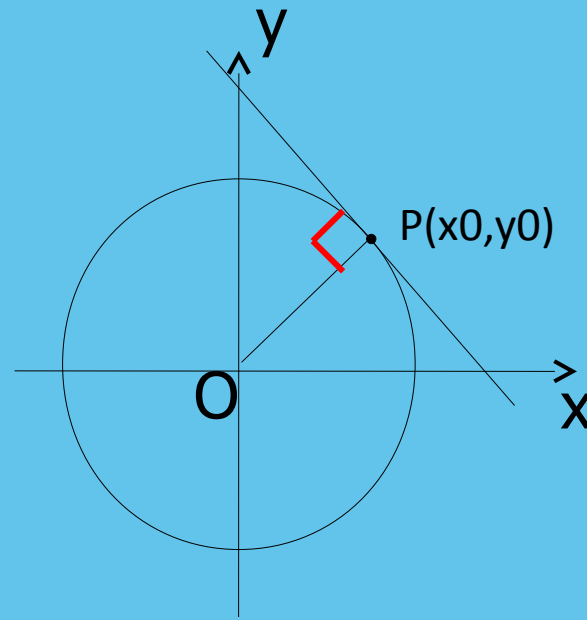


已知圆的方程是  $x^2+y^2=r^2$ ，经过圆上一点  $P(x_0, y_0)$  的切线方程是什么呢？

解：  $\vec{OP} = (x_0, y_0)$  是切线的一个法向量

由直线的点法式方程，可以推出切线方程为

$$x_0x+y_0y=r^2$$



练习：写出过圆  $x^2+y^2=10$  上一点  $M(\sqrt{26}, \quad)$  的切线方程

$$2x + \sqrt{6}y = 10$$

例 4 已知圆的方程是  $x^2+y^2=2$ ，直线方程为  $y=x+b$ ，当  $b$  为何值时，圆与直线有两个交点？只有一个交点？没有交点？

解法一 解由这两个方程组成的方程组

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{①}$$

$$y = x + b \quad \text{②}$$

将②代入①，整理得  $2x^2+2bx+b^2-2=0$  ③

方程③是一个关于  $x$  的二次方程，它的判别式为

$$\Delta = (2b)^2 - 4 \times 2 (b^2 - 2) = -4b^2 + 16 = -4(b^2 - 4) = -4(b+2)(b-2)$$

当  $-2 < b < 2$  时， $\Delta > 0$ ，方程组有两个不同实数解，直线与圆有两个交点

当  $b=2$  或  $b=-2$  时， $\Delta = 0$ ，方程组有两个相同实数解，直线与圆只有一个交点

当  $b < -2$  或  $b > 2$  时， $\Delta < 0$ ，方程组没有实数解，直线与圆没有交点

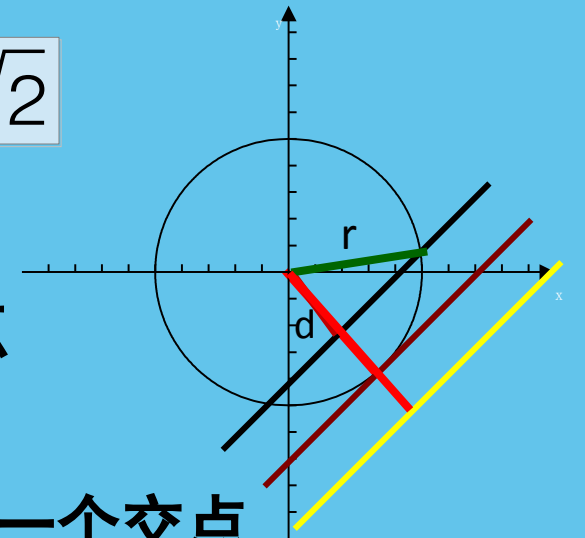
**解法二** 圆与直线有两个交点、只有一个交点、无交点的问题，可以转化为圆心到直线的距离  $d$  小于半径、等于半径、大于半径的问题

先求出圆心  $O(0, 0)$  到直线  $x-y+b=0$  的距离  $d = \frac{|b|}{\sqrt{2}}$  半径  $r = \sqrt{2}$

当  $d < r$  ,  $\frac{|b|}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$  即  $-2 < b < 2$  时，圆与直线相割，有两个交点

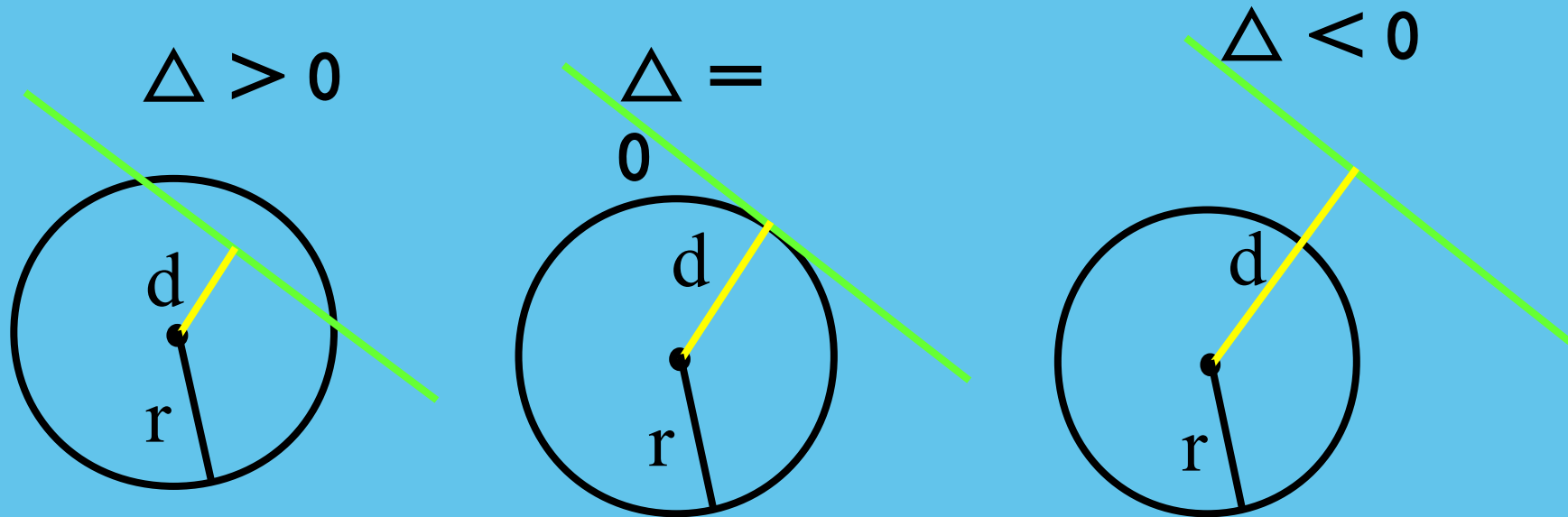
当  $d = r$  ,  $\frac{|b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$  即  $b = 2$  或  $b = -2$  时，圆与直线相切，只有一个交点

当  $d > r$  ,  $\frac{|b|}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$  即  $b < -2$  或  $b > 2$  时，圆与直线相离，没有交点

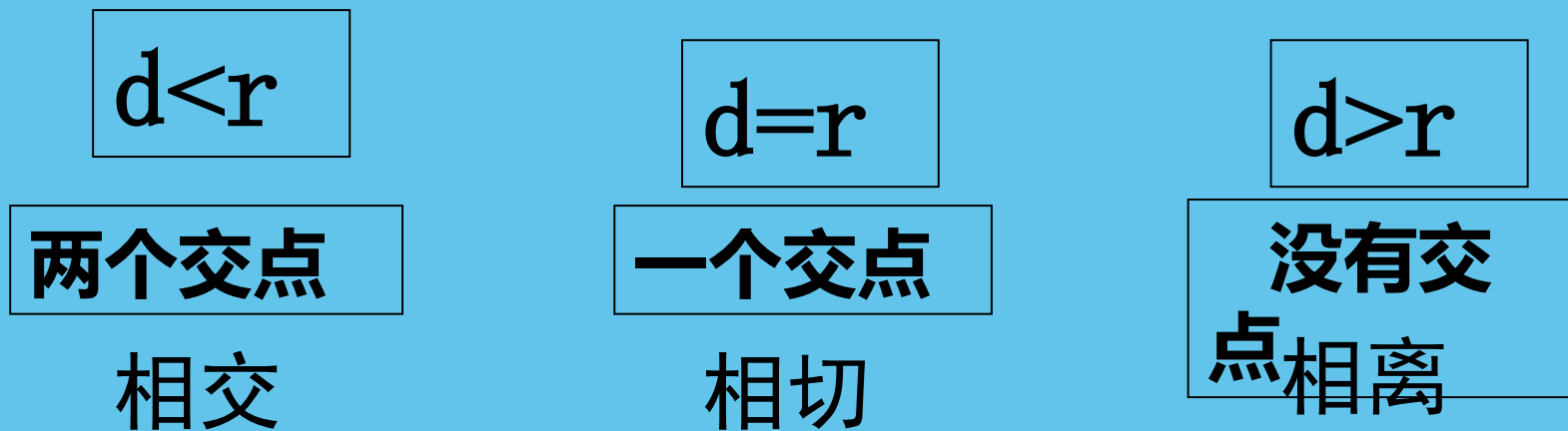


# 直线与圆的位置关系

## 1. 代数法



## 2. 几何法





## 1. 圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad (r>0)$$

圆心

$C(a,b)$

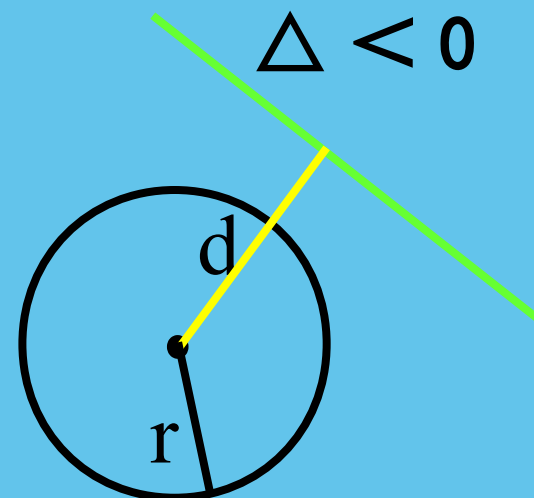
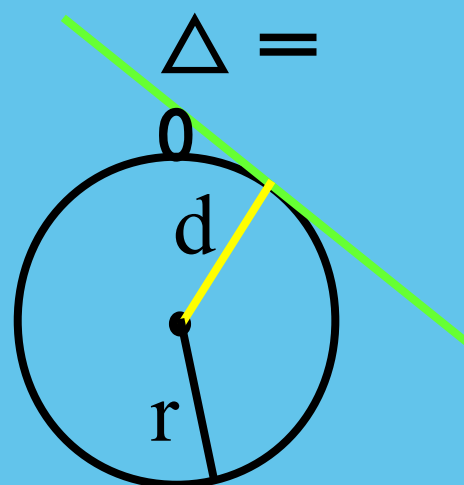
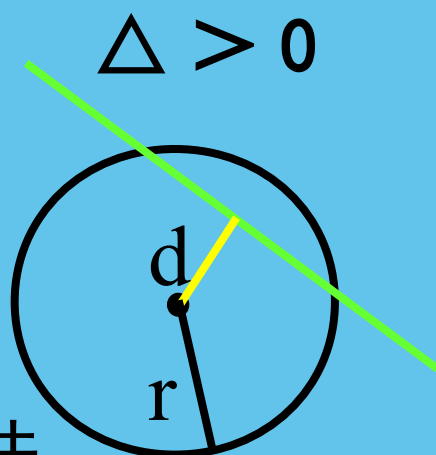
圆的半径  $r$

特殊情况：圆心在原点时，圆的方程为

$$x^2 + y^2 = r^2$$

## 2. 直线与圆的位置关系

(1) 代数法



(2) 几何法

$d < r$

两个公共点

相交

$d = r$

一个公共点

相切

$d > r$

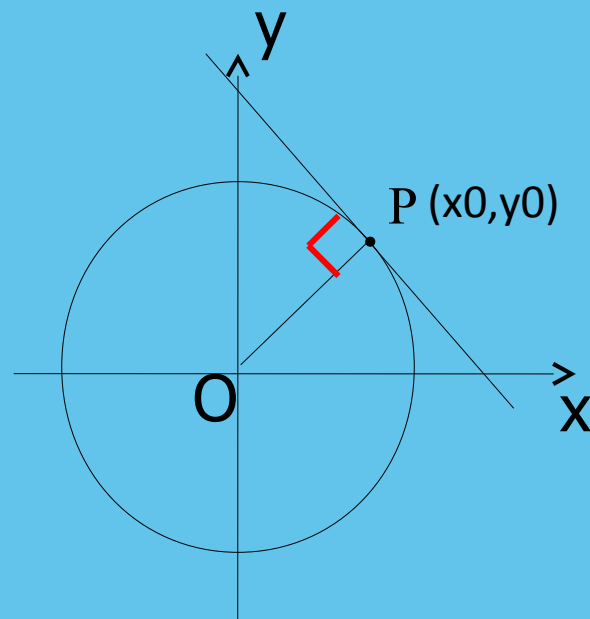
没有公共点

相离

课堂小结

3. 已知圆的方程是  $x^2+y^2=r^2$ ，经过圆上一点  $P(x_0, y_0)$  的切线方程是

$$x_0x+y_0y=r^2$$



# 作业

P101 练习 3-6

谢谢观看！