

§ 9.2 两条直线的位置关系

9.2.2 两条直线的交点与垂直

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

复习

设两条直线分别为

$$l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

如果 l_1 与 l_2 的方程中得 x 和 y 的系数及常数项都不为零，则有

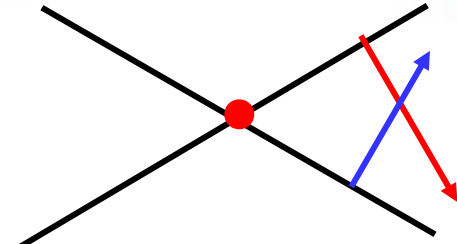
$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

1. 两条直线相交的充要条件

设两条直线分别为

$$\begin{aligned} L1 : A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1) \\ L2 : A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2) \end{aligned}$$



$$L1 \text{ 与 } L2 \text{ 相交} \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$$

$$L1 \text{ 与 } L2 \text{ 相交} \cdot \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad A_2 \neq 0 \text{ 且 } B_2 \neq 0$$

求直线 l_1 与 l_2 的交点，就是要解由这两个方程组成的方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

这个方程组的解就是两条直线的交点坐标

例 5 已知两条直线的方程 $l_1: 2x - y - 5 = 0$, $l_2: x - 3y - 10 = 0$, 判断这两条直线是否相交? 如果相交, 求出交点坐标

解: 显然, 直线 l_1 的一个法向量可取为 $\vec{n_1} = (2, -1)$,

l_2 的一个法向量可取为 $\vec{n_2} = (1, -3)$

因为 $2 \times (-3) \neq (-1) \times 1$, 所以直线 l_1 与 l_2 相交 $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-3}$

解方程组
$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x - 3y - 10 = 0 \end{cases}$$
 得 $x=1, y=-3$

所以直线 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $(1, -3)$

例 6 求过直线 $x-y-1=0$ 和 $x+y-3=0$ 的交点，且与 $2x-y=0$ 平行的直线方程

解：解方程组 $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ 得 $x=2, y=1$ ， 所求直线过点 $(2, 1)$

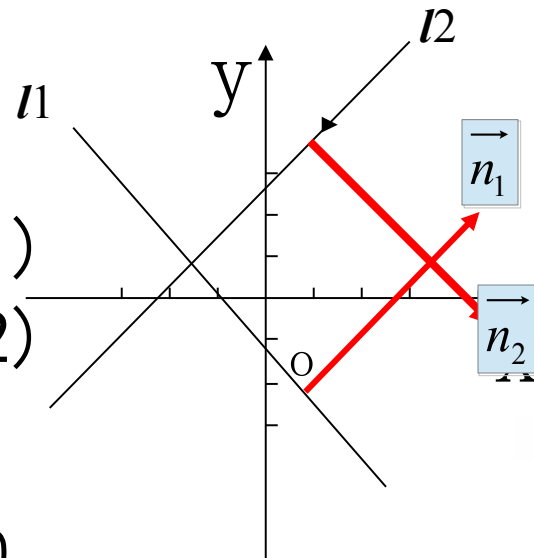
设所求直线的方程为 $2x-y+D=0$ ， 因为该直线过点 $(2, 1)$ ， 将其代入方程， 得 $D=-3$

所求直线 L 的方程为 $2x-y-3=0$

2. 两条直线的垂直的充要条件

设两条直线分别为

$$\begin{aligned} l_1 : A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1) \\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2) \end{aligned}$$



$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

例 7 判断下列各对直线是否垂直

(1) $2x-4y-7=0$ 与 $2x+y-5=0$

(2) $2x=7$ 与 $3y-5=0$

解 (1) 因为法向量分别可取为 $\vec{n_1} = (2, -4)$ $\vec{n_2} = (2, 1)$
 $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 2 \times 2 + (-4) \times 1 = 0$ 所以这两条直线垂直

(2) 因为法向量分别可取为 $\vec{n_1} = (2, 0)$ $\vec{n_2} = (0, 3)$
 $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 2 \times 0 + 0 \times 3 = 0$ 所以这两条直线垂直

练习 9-6 2

例 8 求证直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Bx-Ay+C_2=0$ 垂直

证明：因为法向量分别可取为 $\vec{n_1}$ (A, B) , $\vec{n_2}$ = (B, -A)

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = AB + B(-A) = 0 \quad \text{所以这两条直线垂直}$$

一般地，与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线都可表示为
 $Bx-Ay+D=0$

例 9 求过点 (1, 2) ，且与直线 $2x+y-10=0$ 垂直的直线方程

解：设所求直线为 $x-2y+D=0$,

因为直线过点 (1, 2) ，将其代入方程， $1-2 \times 2+D=0$

解这个方程，得 $D=3$

所以，所求直线方程为 $x-2y+3=0$



一、两直线的位置关系

若直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, 直线 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

当 A_1 , A_2 , B_1 , B_2 都不为 0 时 ,

1、 $l_1 // l_2$ $\diamond \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

2、 l_1 、 l_2 重合 $\diamond \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

3、 l_1 、 l_2 相交 $\diamond \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$

4、 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$



2. 常用重要结论

1、与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线方程：

$$Ax+By+D=0 \quad (C \neq D)$$

2、与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线方程：

$$Bx-Ay+D=0$$

作业

P94 练习 1 - 6



谢谢观看！