

§ 9.2 两条直线的位置关系

9.2.1 两条直线的平行与重合

授课教师：李辉

泰山护理职业学院



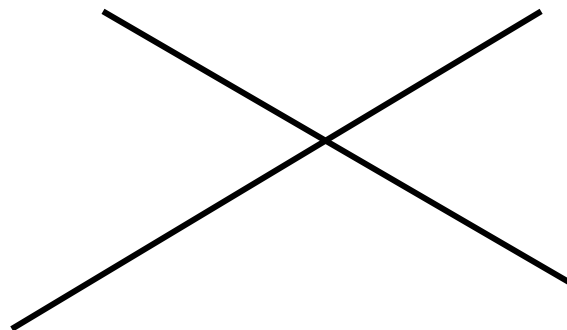
1. 平行



2. 重合



3. 相交



4. 垂直

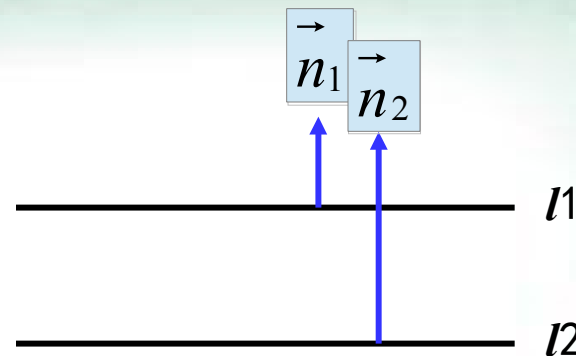


1. 两条直线平行的充要条件

设两条直线分别为

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1)$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2)$$



$l_1 // l_2 \Leftrightarrow$ 存在一个非零实数 λ , 使 $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$, 且 $C_1 \neq \lambda C_2$

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \lambda A_2 \\ B_1 = \lambda B_2 \\ C_1 \neq \lambda C_2 \end{cases} \quad (\lambda \neq 0)$$

$$l_1: x+2y+3=0$$

$$l_2: 2x+4y+5=0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{5}$$

如果 l_1 与 l_2 的方程中的 x 和 y 的系数及常数项都不为零, 则有

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

所以 $l_1 \not// l_2$

2. 两条直线重合的充要条件

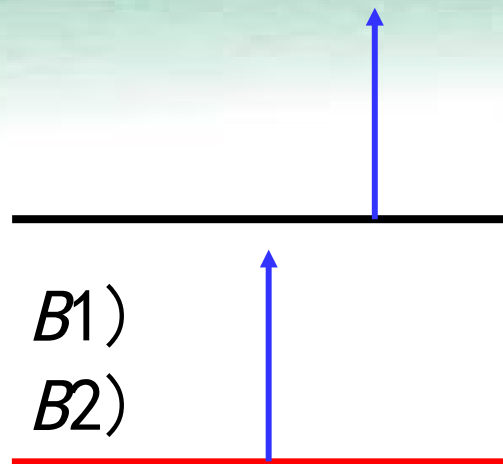
设两条直线分别为

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1)$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2)$$

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \lambda A_2 \\ B_1 = \lambda B_2 \\ C_1 = \lambda C_2 \end{cases} \quad (\lambda \neq 0)$$

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \lambda A_2 \\ B_1 = \lambda B_2 \\ C_1 = \lambda C_2 \end{cases} \quad (\lambda \neq 0)$$



$$l_1: x + 2y + 3 = 0$$

$$l_2: 2x + 4y + 6 = 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \text{ 所以 } l_1 // l_2 \text{ 重合}$$

如果 l_1 与 l_2 的方程中的 x 和 y 的系数及常数项都不为零，则有

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

例 1 已知直线 $l_1: 2x-4y+7=0$, $l_2: x-2y+5=0$, 求证: $l_1 // l_2$

证明: 显然, 直线 l_1 的一个法向量可取 $\vec{n}_1 = (2, -4)$,

因为 $\vec{n}_1 = 2\vec{n}_2$ 的一个法向量可取为 $\vec{n}_2$ 且 $7 \neq 2 \times 5$ 所以 $l_1 // l_2$

$l_1 // l_2 \Leftrightarrow$ 存在一个非零实数 λ , 使 $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$, 且 $C_1 \neq \lambda C_2$

另证

因为 $\frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{7}{5}$

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

所以 $l_1 // l_2$

练习 9-5 1

例 2 求证直线 $l_1: Ax+By+C_1=0$ 与直线 $l_2: Ax+By+C_2=0$ ($C_1 \neq C_2$) 平行

证明：直线 l_1 的一个法向量可取为 $\vec{n_1} = (A, B)$,
直线 l_2 的一个法向量可取为 $\vec{n_2} = (A, B)$

显然 $\vec{n_1} = \vec{n_2}$ 且 $C_1 \neq C_2$ 所以 $l_1 // l_2$

结论 一般地，与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线都可以表示成 $Ax+By+D=0$ ($D \neq C$)

例 3 求过点 $(1, -4)$ ，且与直线 $2x+3y+5=0$ 平行的直线方程

解：设所求直线方程为 $2x+3y+D=0$,

由于所求直线过点 $(1, -4)$ ，将其代入方程， $2 \times 1 + 3 \times (-4) + D = 0$

得 $D=10$ 因此，所求直线方程为 $2x+3y+10=0$

练习 9-5 2

例 4 已知四边形 ABCD 的四条边所在的直线方程分别是

$$AB : 2x - 3y - 7 = 0 \quad BC : 3x + 6y - 11 = 0$$

$$CD : 4x - 6y + 5 = 0 \quad DA : x + 2y - 4 = 0$$

求证四边形 ABCD 是平行四边形

证明: $AB : 2x - 3y - 7 = 0$

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{-7}{5}$$

所以 $AB \parallel CD$

$CD : 4x - 6y + 5 = 0$

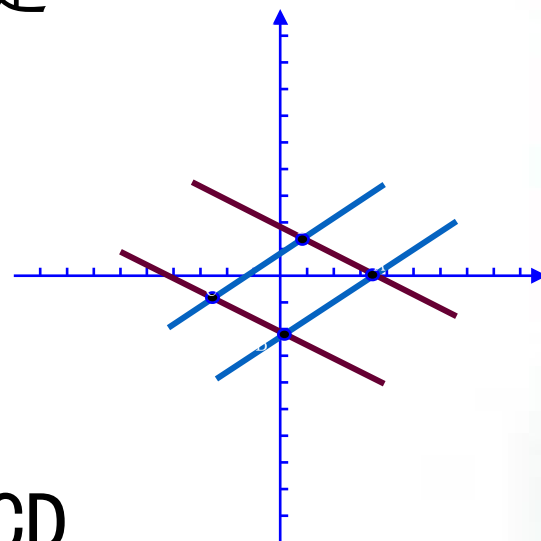
$BC : 3x + 6y - 11 = 0$

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{-11}{-4}$$

所以 $BC \parallel AD$

$AD : x + 2y - 4 = 0$

所以四边形 ABCD 是平行四边形





1. 两条直线平行或重合的充要条件

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

如果 l_1 与 l_2 的方程中的 x 和 y 的系数及常数项都不为零，则有

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

2. 结论：一般地，与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线都可以表示成 $Ax+By+D=0$ ($D \neq C$)

作业

P91 练习 1 - 3



谢谢观看！