



课程名称：数学 授课班级：_____ 授课人：_____ 序号：_____
课题：8.4.1 向量的内积 _____ 类型：新授课 _____ 教学时数： 2 _____

一、教学目标（知识目标、能力目标、思想目标）

- 1.掌握平面向量的内积定义及其几何意义；
- 2.掌握平面向量内积的重要性质及运算律；
- 3.了解用平面向量的内积可以处理有关长度、角度和垂直的问题；
- 4.掌握向量垂直的条件.

二、教学重点、难点

教学重点：平面向量的内积定义

教学难点：平面向量内积的定义及运算律的理解和平面向量内积的应用

三、教学准备（教材、教具、教学参考书）

教材：中等职业教育规划教材 数学 第二册

参考书：中等职业教育规划教材 数学 第二册参考书

四、教法与学法

课前、课中、课后都要利用教学资源平台辅助教学

本节学习的关键是启发学生理解平面向量数量积的定义，理解定义之后便可引导学生推导数量积的运算律，然后通过概念辨析题加深学生对于平面向量数量积的认识.主要知识点：平面向量数量积的定义及几何意义；平面向量数量积的5个重要性质；平面向量数量积的运算律.

五、教学内容与步骤

（一）、检查复习

1. 向量共线定理 向量 b 与非零向量 a 共线的充要条件是：有且只有一个非零实数 λ ，使 $b = \lambda a$.

2. 平面向量的坐标表示

分别取与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 i 、 j 作为基底.任作一个向量 a ，由平面向量基本定理知，有且只有一对实数 x 、 y ，使得 $a = xi + yj$

把 (x, y) 叫做向量 a 的（直角）坐标，记作 $a = (x, y)$

3. 平面向量的坐标运算

若 $a = (x_1, y_1)$ ， $b = (x_2, y_2)$ ，则 $a + b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ， $a - b = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ ，

$\lambda a = (\lambda x, \lambda y)$.

若 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

4. $a \parallel b$ ($b \neq \vec{0}$) 的充要条件是 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$



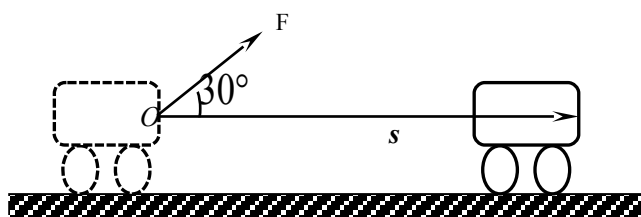
5、平面向量的长度公式： $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

6、平面上任意两点间的距离公式：

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

7、中点公式 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

(二)、导入新课



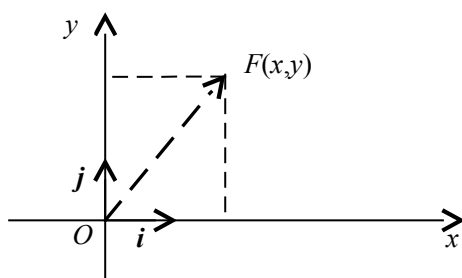
如图所示，水平地面上有一辆车，某人用 100 N 的力，朝着与水平线成 30° 角的方向拉小车，使小车前进了 100 m. 那么，这个人做了多少功？

我们知道，这个人做功等于力与在力的方向上移动的距离的乘积。设水平方向的单位向量为 $\mathbf{i}$ ，垂直方向的单位向量为 $\mathbf{j}$ ，则

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = |\mathbf{F}|\sin 30^\circ \mathbf{j} + |\mathbf{F}|\cos 30^\circ \mathbf{i},$$

即力 $\mathbf{F}$ 是水平方向的力与垂直方向的力的和，垂直方向上没有产生位移，没有做功，水平方向上产生的位移为 $\mathbf{s}$ ，即

$$W = |\mathbf{F}| \cos 30^\circ \cdot |\mathbf{s}| = 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = 500\sqrt{3} \quad (\text{J})$$





这里，力 F 与位移 s 都是向量，而功 W 是一个数量，它等于由两个向量 F, s 的模及它们的夹角的余弦的乘积， W 叫做向量 F 与向量 s 的内积，它是一个数量，又叫做数量积。

（三）、讲授新课

通过课前自主学习，让学生分组回答问题如下：

- （1）掌握平面向量的内积定义及其几何意义；
- （2）掌握平面向量内积的重要性质及运算律；
- （3）课前自主学习过程中遇到了哪些问题？

根据课前的自主学习，一起回顾所学知识：

1. 两个非零向量夹角的概念

已知非零向量 a 与 b ，作 $\overrightarrow{OA} = a$ ， $\overrightarrow{OB} = b$ ，则

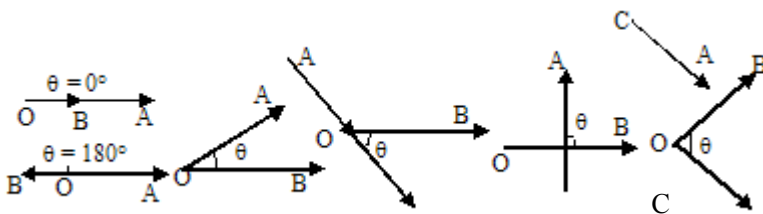
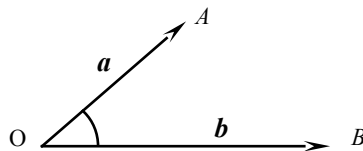
$\angle AOB = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 叫 a 与 b 的夹角。

说明：（1）当 $\theta = 0$ 时， a 与 b 同向；

（2）当 $\theta = \pi$ 时， a 与 b 反向；

（3）当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， a 与 b 垂直，记 $a \perp b$ ；

（4）注意在两向量的夹角定义，两向量必须是同起点的. 范围 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$



2. 平面向量数量积（内积）的定义：已知两个非零向量 a 与 b ，它们的夹角是 θ ，则数量 $|a||b|\cos\theta$ 叫 a 与 b 的数量积，记作 $a \cdot b$ ，即有 $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$ ，

($0 \leq \theta \leq \pi$)，并规定 0 与任何向量的数量积为 0 。

探究：两个向量的数量积与向量同实数积有很大区别

（1）两个向量的数量积是一个实数，不是向量，符号由 $\cos\theta$ 的符号所决定。

（2）两个向量的数量积称为内积，写成 $a \cdot b$ ；今后要学到两个向量的外积 $a \times b$ ，而 $a \cdot b$ 是两个向量的数量的积，书写时要严格区分. 符号 “ $\cdot$ ” 在向量运算中不是乘号，既不能省略，也不能用 “ $\times$ ” 代替。

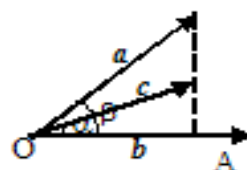
（3）在实数中，若 $a \neq 0$ ，且 $a \cdot b = 0$ ，则 $b = 0$ ；但是在数量积中，若 $a \neq 0$ ，且 $a \cdot b = 0$ ，不能推出 $b = 0$. 因为其中 $\cos\theta$ 有可能为 0 。

（4）已知实数 a, b, c ($b \neq 0$)，则 $ab = bc \Rightarrow a = c$. 但是 $a \cdot b = b \cdot c \nRightarrow a = c$

如右图： $a \cdot b = |a||b|\cos\beta = |b||OA|$ ， $b \cdot c = |b||c|\cos\alpha = |b||OA|$

$\Rightarrow a \cdot b = b \cdot c$ 但 $a \neq c$

（5）在实数中，有 $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ ，但是 $(a \cdot b)c \neq a(b \cdot c)$

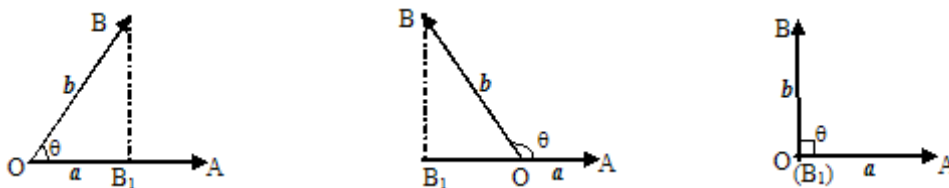




课程名称：数学 授课班级：_____ 授课人：_____ 序号：_____
 课题：8.4.1 向量的内积 _____ 类型：新授课 教学时数： 2

显然，这是因为左端是与 c 共线的向量，而右端是与 a 共线的向量，而一般 a 与 c 不共线.

3. “投影”的概念：作图



定义： $|b|\cos\theta$ 叫做向量 b 在 a 方向上的投影.

投影也是一个数量，不是向量；当 θ 为锐角时投影为正值；当 θ 为钝角时投影为负值；当 θ 为直角时投影为 0；当 $\theta = 0^\circ$ 时投影为 $|b|$ ；当 $\theta = 180^\circ$ 时投影为 $-|b|$.

4. 向量的数量积的几何意义：

数量积 $a \cdot b$ 等于 a 的长度与 b 在 a 方向上投影 $|b|\cos\theta$ 的乘积.

5. 两个向量的数量积的性质：

设 a 、 b 为两个非零向量， e 是与 b 同向的单位向量.

$$1^\circ e \cdot a = a \cdot e = |a|\cos\theta$$

$$2^\circ a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$$

$$3^\circ \text{ 当 } a \text{ 与 } b \text{ 同向时, } a \cdot b = |a||b|; \text{ 当 } a \text{ 与 } b \text{ 反向时, } a \cdot b = -|a||b|. \text{ 特别的 } a \cdot a = |a|^2 \text{ 或 } |a| = \sqrt{a \cdot a}$$

$$4^\circ \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

$$5^\circ |a \cdot b| \leq |a||b|$$

6. 可以验证，向量的内积满足下面的运算律：

$$(1) \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

$$(2) \quad (\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b).$$

$$(3) \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

注意：一般地，向量的内积不满足结合律，即

$$a \cdot (b \cdot c) \neq (a \cdot b) \cdot c.$$

请结合实例进行验证.

例题

例 1 已知 $|a|=3$, $|b|=2$, $\langle a, b \rangle = 60^\circ$, 求 $a \cdot b$.

解 $a \cdot b = |a||b|\cos\langle a, b \rangle = 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3.$

例 2 已知 $|a|=|b|=\sqrt{2}$, $a \cdot b = -\sqrt{2}$, 求 $\langle a, b \rangle$.



$$\text{解 } \cos \langle a, b \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由于 $0 \leq \langle a, b \rangle \leq 180^\circ$,

所以 $\langle a, b \rangle = 135^\circ$.

例3 已知 $|\mathbf{a}|=6$, $|\mathbf{b}|=4$, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 60° 求 $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}-3\mathbf{b})$.

例4 判断正误, 并简要说明理由.

① $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$; ② $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$; ③ $\mathbf{0} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; ④ $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$; ⑤ 若 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 则对任一非零 $\mathbf{b}$ 有 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$; ⑥ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 中至少有一个为 $\mathbf{0}$; ⑦ 对任意向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 都有 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$; ⑧ $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 是两个单位向量, 则 $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$.

解: 上述8个命题中只有③⑧正确;

对于①: 两个向量的数量积是一个实数, 应有 $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$; 对于②: 应有 $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$;

对于④: 由数量积定义有 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\cos \theta| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, 这里 θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 只有 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 时, 才有 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$;

对于⑤: 若非零向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 垂直, 有 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$;

对于⑥: 由 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 可知 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 可以都非零;

对于⑦: 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 共线, 记 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{c}$.

则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\lambda \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$,

$\therefore (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \lambda (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \lambda \mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$

若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 不共线, 则 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \neq (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$.

评述: 这一类型题, 要求学生确实把握好数量积的定义、性质、运算律.

例5 已知 $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 6$, 当① $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, ② $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, ③ $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角是 60° 时, 分别求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

解: ① 当 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 时, 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向, 则它们的夹角 $\theta = 0^\circ$,

$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos 0^\circ = 3 \times 6 \times 1 = 18$;

若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反向, 则它们的夹角 $\theta = 180^\circ$,

$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos 180^\circ = 3 \times 6 \times (-1) = -18$;

② 当 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 时, 它们的夹角 $\theta = 90^\circ$,

$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$;

③ 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角是 60° 时, 有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos 60^\circ = 3 \times 6 \times \frac{1}{2} = 9$$

评述: 两个向量的数量积与它们的夹角有关, 其范围是 $[0^\circ, 180^\circ]$, 因此, 当 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 时, 有 0° 或 180° 两种可能.



例6 已知 $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=4, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 60^\circ$, 求:

(1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ (2) $|\vec{a} + \vec{b}|$

解: (1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$= 25 - 16 = 9$$

(2) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

$$= |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + |\vec{b}|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= 25 + 2 \times 5 \times 4 \times \frac{1}{2} + 16 = 61$$

所以 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{61}$

结论

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

练习 P70 1-2

(四)、教学小结

向量内积的定义：1. 夹角

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0^\circ$$

同向

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 90^\circ$$

垂直

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 180^\circ$$

反向

2. 公式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

性质和运算律：

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \text{ 或 } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

运算律

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

(五)、评价与反馈

本节课公式较多，部分学生还不能掌握

(六)、布置作业

课后利用教学资源平台上的微课复习所学内容，完成资源平台上的作业题

P62 P70 3-4