

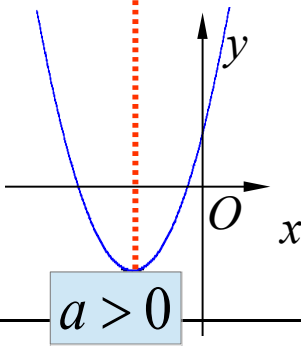
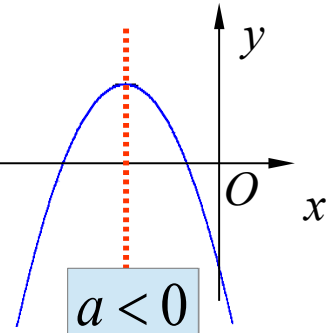
第三章 函数

3.5 二次函数的图像和性质的应用

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图像和性质

二次函数 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$	 $a > 0$	 $a < 0$
开口方向	向 上	向 下
对 称 轴	直 线 $x=-\frac{b}{2a}$	直 线 $x=-\frac{b}{2a}$
顶 点 坐 标	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$
最 值	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时, 最小值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时, 最大值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$
单 调 性	在 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上是减函数, 在 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上是增函数	在 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上是增函数, 在 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上是减函数

例3 求函数 $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ 的最小值和图象的对称轴，并说出它在哪个区间上是增函数，在哪个区间上是减函数。

解法一

:

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + 1$$

$$= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

所以函数图像的顶点 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

所以 $y_{\min} = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ ，函数图象的对称轴是直线 $x = -\frac{1}{3}$ ，

它在区间 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ 上是减函数，在区间 $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 上是增函数。

例3 求函数 $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ 的最小值和图像的对称轴，并说出它在哪个区间上是增函数，在哪个区间上是减函数。

解法二：函数 $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

由 $a=3, b=2, c=1$ 得

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times 3} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times 3 \times 1 - 2^2}{4 \times 3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

所以函数图像的顶点 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

因为 $a=3>0$ ，所以函数图像开口向上，函数有最小值

所以 $y_{\min} = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ ，函数图像的对称轴是直线 $x = -\frac{1}{3}$ ，

它在区间 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ 上是减函数，在区间 $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 上是增函数。

新课

例 4 已知二次函数 $y = x^2 - x - 6$ ，说出：

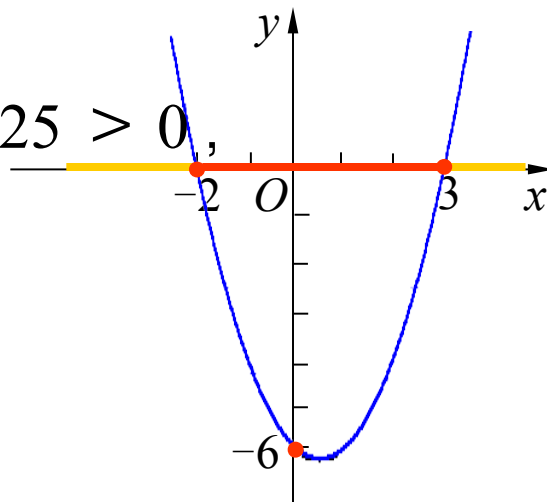
(1) x 取哪些值时， $y = 0$ ；

解：(1) 求使 $y = 0$ 的 x 的值，即求二次方程

$x^2 - x - 6 = 0$ 的所有根.
方程的判别式 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$,

解得 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 3$.

当 $x = -2$ 或 $x = 3$ 时，函数值 $y = 0$



新课

例 4 已知二次函数 $y = x^2 - x - 6$ ，说出：

(2) x 取哪些值时， $y > 0$ ； x 取哪些值时， $y < 0$ 。

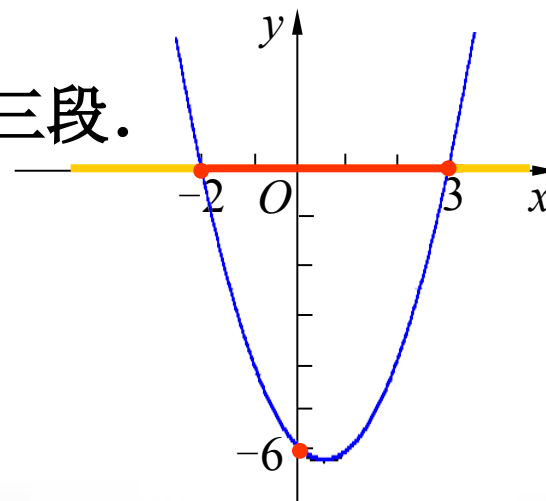
解：(2) 画出函数简图，图象的开口向上。

从图象上可以看出，它与 x 轴相交于两点

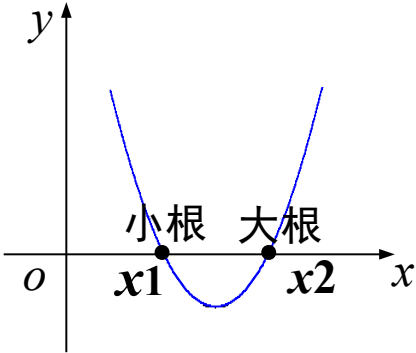
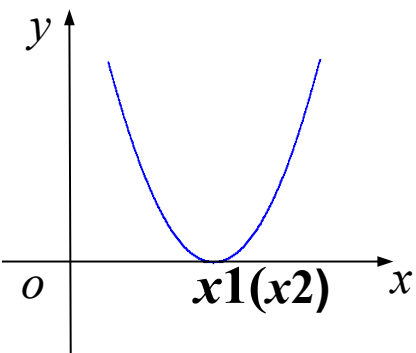
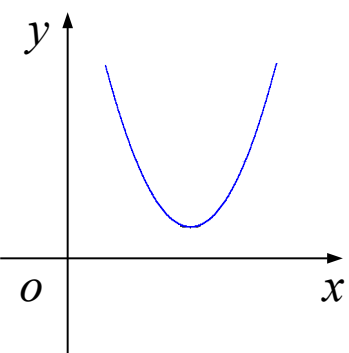
$(-2, 0)$ ， $(3, 0)$ ，这两点把 x 轴分成三段。

所以当 $x \in (-2, 3)$ 时， $y < 0$ ；

当 $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ 时， $y > 0$ 。



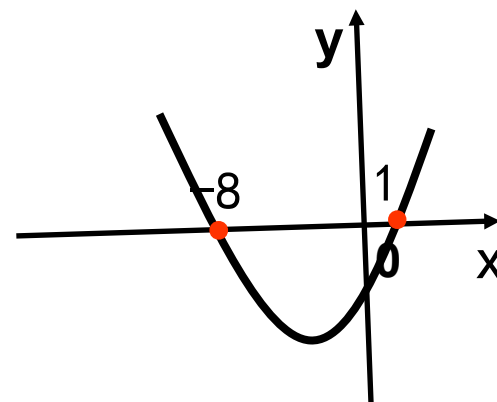
3. 一元二次方程、二次不等式与二次函数的关系

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$			
方程 $ax^2 + bx + c = 0$	有两个不等实根 x_1, x_2	有两个相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 小于小根或大于大根	$\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\}$	R
$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集	(x_1, x_2) 小根与大根之间	$\emptyset$	$\emptyset$

练习

下列函数的自变量在什么范围内取值时，函数值大于 0、小于 0 或等于 0 .

$$y = x^2 + 7x - 8$$



解： $y=0$, 即 $x^2+7x-8=0$, $(x+8)(x-1)=0$, $x_1=-8$, $x_2=1$

$y>0$ 时, x 取值为 $\{x \mid x<-8 \text{ 或 } x>1\}$

$y<0$ 时, x 取值为 $\{x \mid -8<x<1\}$

交流讨论



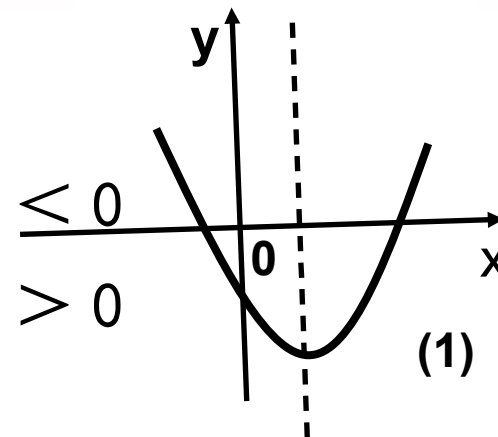
1、抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 如图所示，则 B ()

(A) $a > 0, b > 0, c > 0$

(B) $a > 0, b < 0, c \leq 0$

(C) $a > 0, b > 0, c < 0$

(D) $a > 0, b < 0, c > 0$



显然 $a > 0, c < 0$ ，对称轴在 y 轴右侧，所以 $-\frac{b}{2a} > 0$ $\frac{b}{2a} < 0$

$$b < 0$$

交流讨论



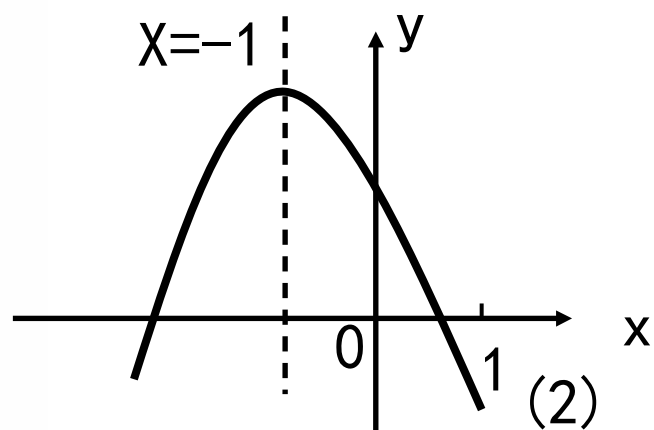
2、已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，下列结论中，正确的个数是（ ） ① $a+b+c < 0$ ② $a-b+c > 0$ ③ $abc > 0$ ④ $b=2a$

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 1



① $f(1) < 0$, 则 $f(1) = a + b + c < 0$

② $f(-1) > 0$, 则 $f(-1) = a - b + c > 0$

③ $a < 0, c > 0$,

$$-\frac{b}{2a} < 0 \quad b < 0$$

④ $-\frac{b}{2a} = -1$ 所以 $b = 2a$



谢谢观看！

