# 第三章　函数

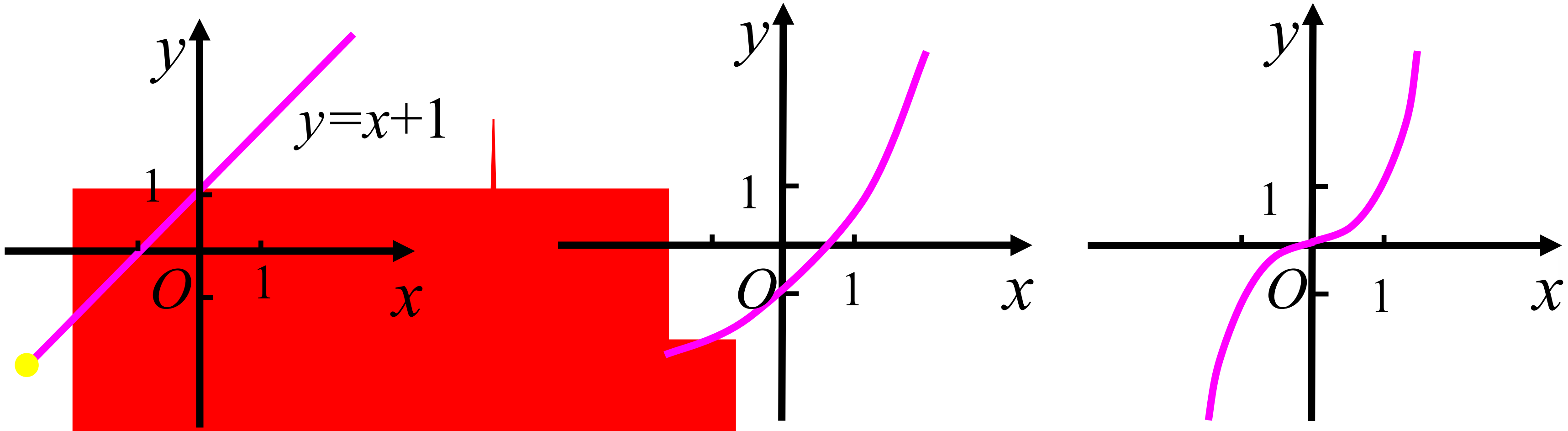
## 3.3 函数的单调性

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

# 一、函数的单调性概念

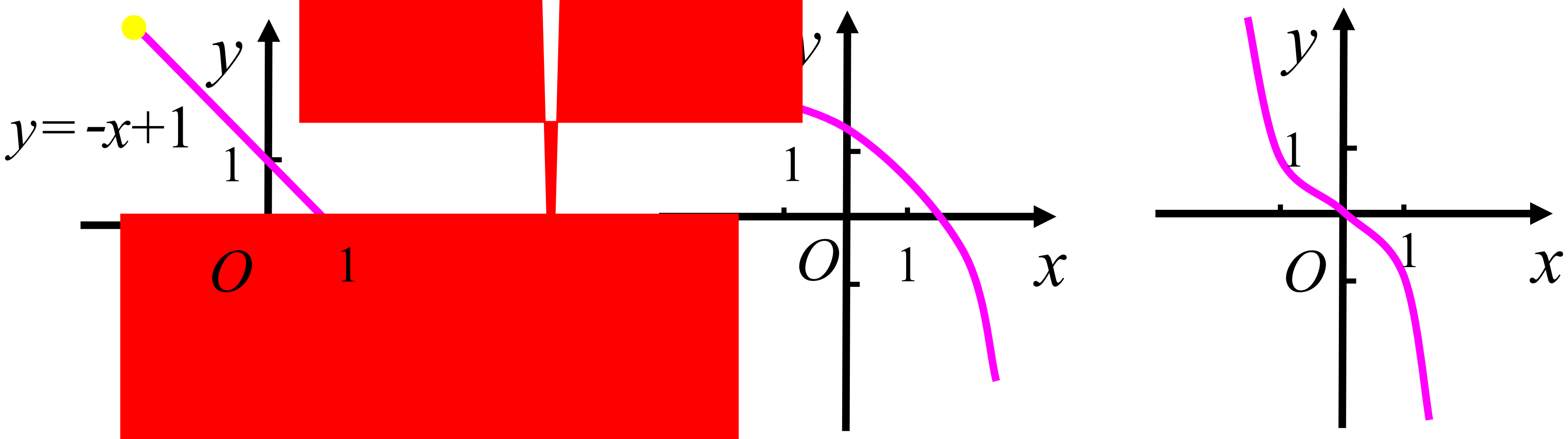
**观察第一组函数图象，指出其变化趋势 .**




从左至右图象呈 <u>上升</u> 趋势 .

# 一、函数的单调性概念

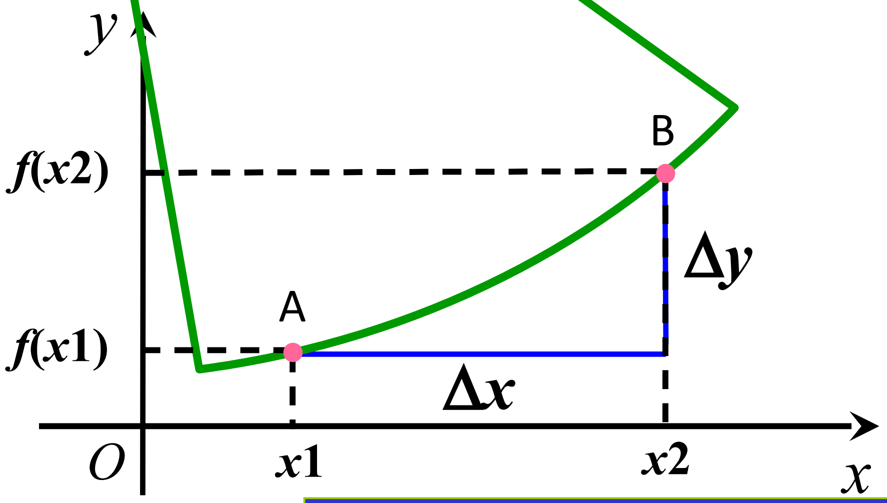
观察第二 图 出其变化趋势．




从 下降 趋势．

# 一、函数的单调性概念

在函数 $y=f(x)$ 的图象上任取两点 $A(x1，y1)$，$B(x2, y2)$，记 $\Delta x=x2-x1$，$\Delta y=f(x2)-f(x1)=y2-y1$ .



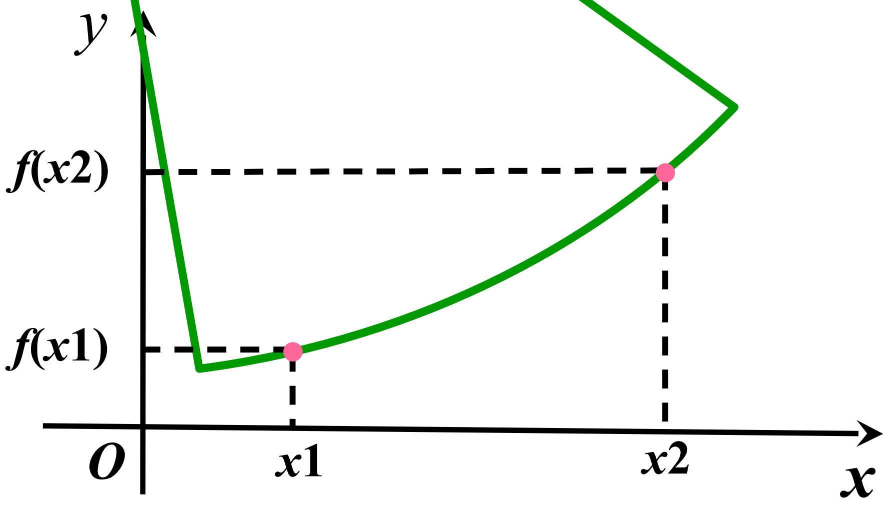

自变量 x 增大，函数

自变量 x 减小，函数

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

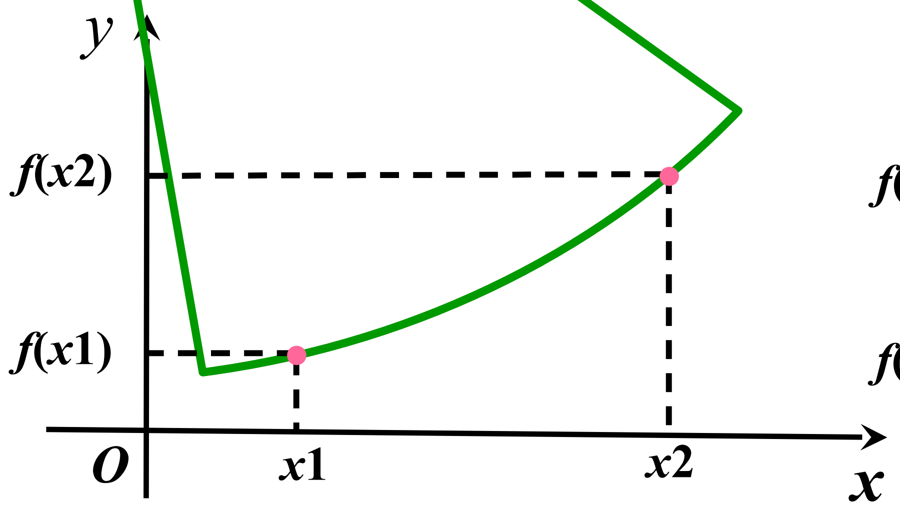
# 一、函数的单调性概念

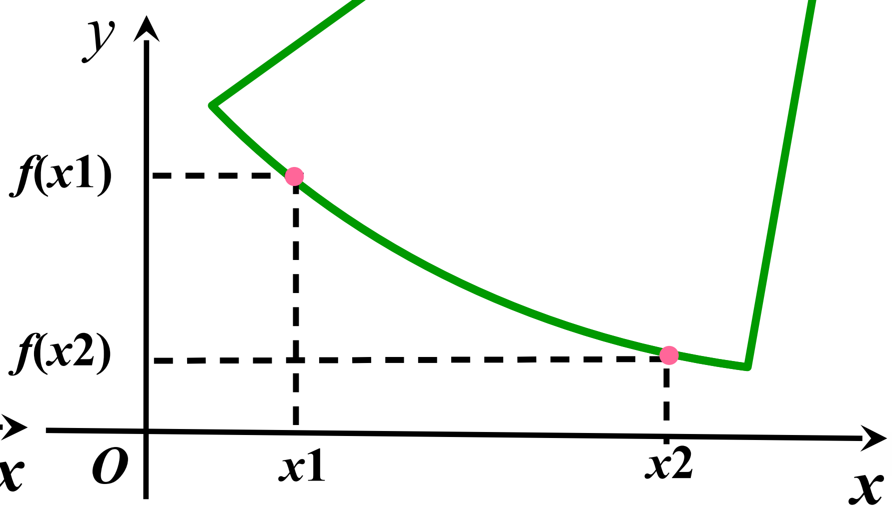
**(1) 增函数：** 在给定的区间上任取 $x_1$， $x_2$，且 $x_1 \neq x_2$ ，函数 $f(x)$ 在给定区间上为增函数的充要条件是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 0 ，这个给定的区间就为单调增区间.



## (2) 减函数的概念

## 类比得到减函数概念




**增函数：** 在给定的区间上任取 x1， x2 $(x_1 \neq x_2)$ 函数 $f(x)$ 在给定区间上为增函数的充要条件是 $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ ，这个给定的区间就为单调增区间。

**减函数：** 在给定的区间上任取 x1， x2 $(x_1 \neq x_2)$ 函数 $f(x)$ 在给定区间上为减函数的充要条件是 $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ ，这个给定的区间就为单调减区间。

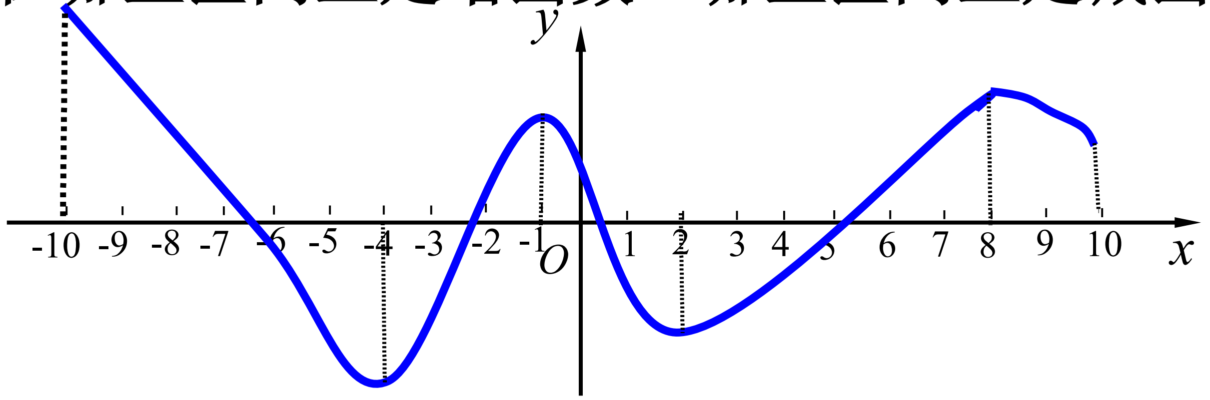
## （3）函数单调区间的概念

如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间上具有（严格的）单调性，这个区间叫做函数 $f(x)$ 的单调区间.

函数单调区间，一般是指保持函数单调性的最大区间。

## 二、判别函数单调性

**例 1** 给出函数 $y=f(x)$ 的图象，如图所示，根据图象说出这个函数在哪些区间上是增函数？哪些区间上是减函数？

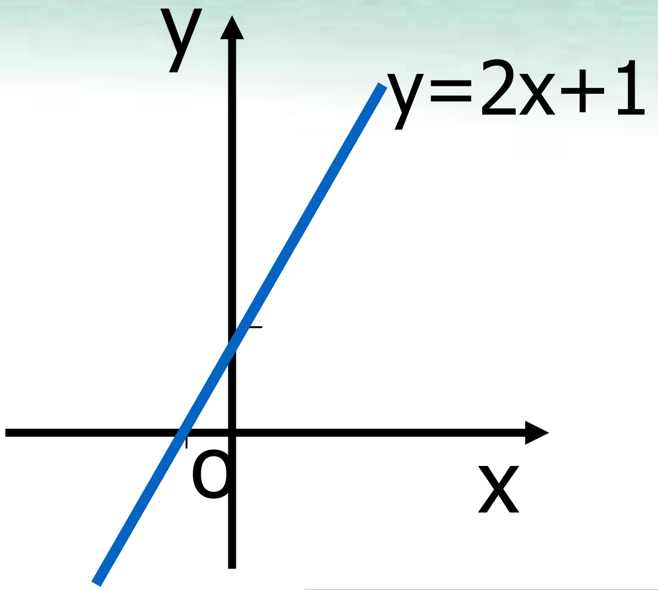



解：函数 $y=f(x)$ 的单调区间有 $[-10,-4)$，$[-4,-1)$，$[-1,2)$，$[2,8)$，$[8,10]$.

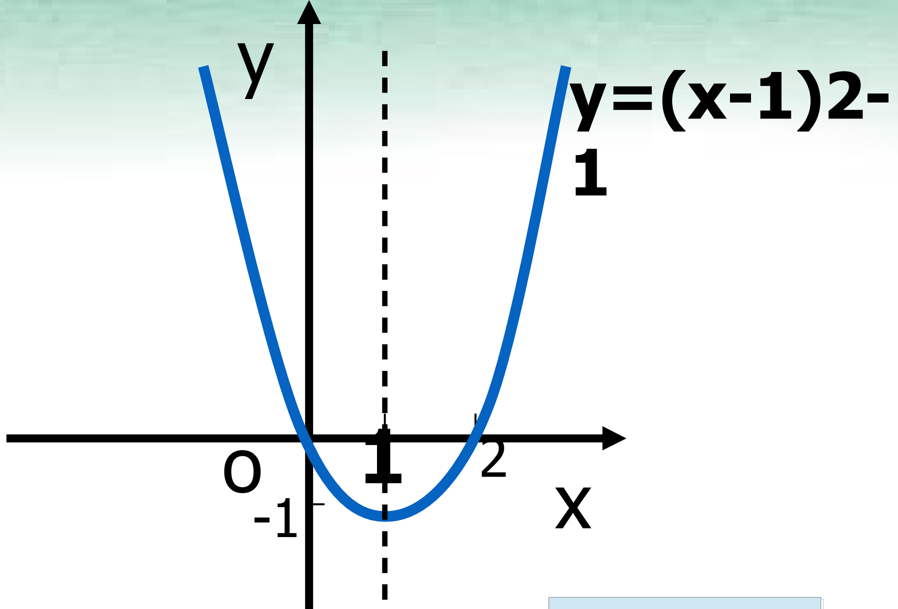
其中 $y=f(x)$ 在区间 $[-10,-4)$，$[-1,2)$，$[8,10]$ 上是减函数；

在区间 $[-4,-1)$，$[2,8)$ 上是增函数.

写出函数的单调区间练习

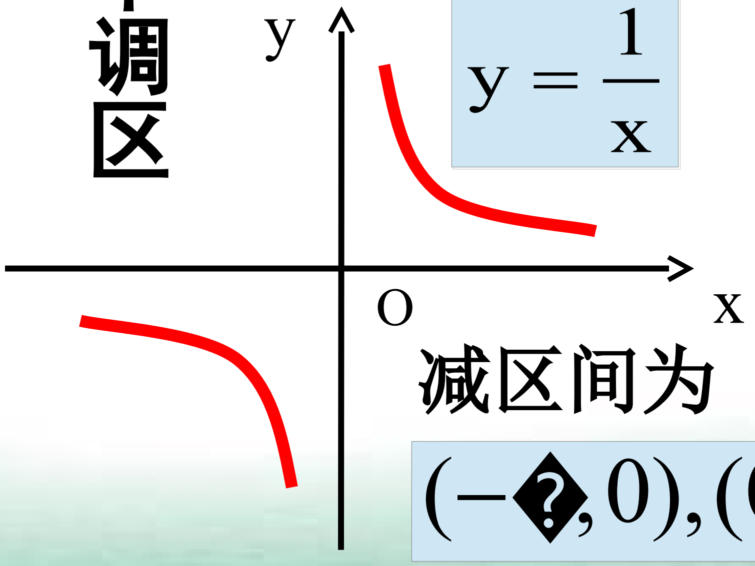



增区间为 (−?, )



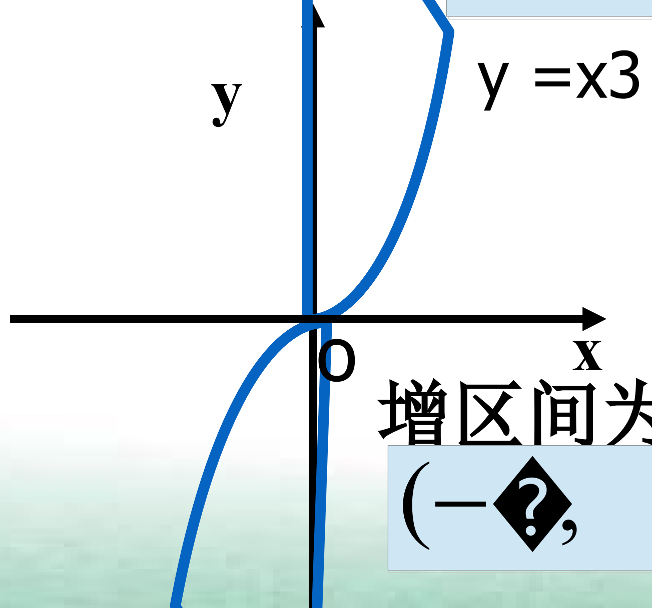

增区间为 [1,+ )

减区间为 (− ,1]




$y = \frac{1}{x}$

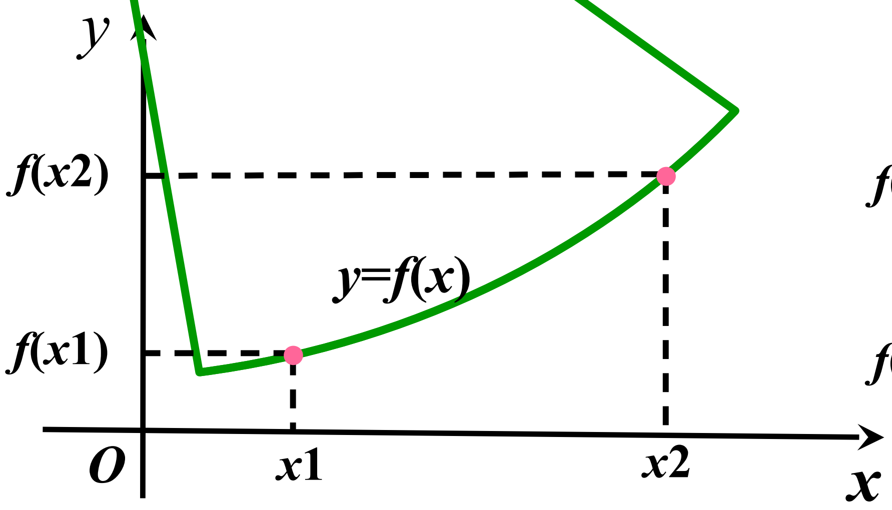
减区间为 (−?,0),(0, )

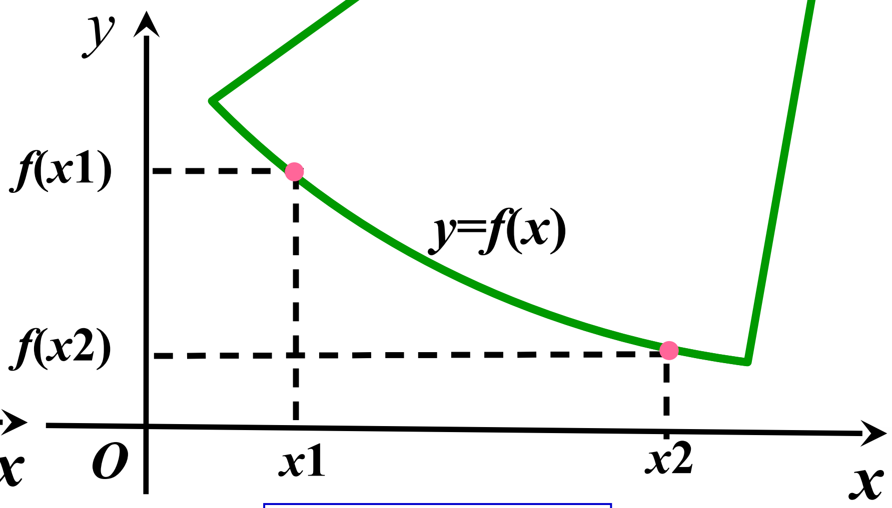



增区间为 (−?, )

# 二．证明函数单调性

## 怎样利用函数解析式判断单调性




| 增函数 | 减函数 |
|---|---|
| 自变量增大 ($\Delta x>0$)<br>函数值增大 ($\Delta y>0$) | 自变量增大 ($\Delta x>0$)<br>函数值减小 ($\Delta y<0$) |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ | $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$ |

**例 2　证明函数 $f(x) = 2x + 1$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.**

**证明：设 $x_1$，$x_2$ 是任意两个不相等的实数，则**

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

$$= (2x_2+1) - (2x_1+1)$$

$$= 2(x_2 - x_1) = 2\Delta x$$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 > 0$$

**因此，函数 $f(x) = 2x + 1$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.**

证明函数单调性的步骤

**计算 $\Delta x$ 和 $\Delta y$**

↓

**计算** $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

↓

**当 $k > 0$ 时，函数在这个区间上是增函数；**
**当 $k < 0$ 时，函数在这个区间上是减函数.**

**例 3　求证：函数　$f(x)=\frac{1}{x}$　在区间 (-∞，0) 上是减函数.**

**证明：设　$x1$，$x2$　是任意两个不相等的负实数，则**　$\Delta x = x2 - x1$

$\Delta y = f(x2) - f(x1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = -\frac{\Delta x}{x_1 x_2}.$

又因为 x1x2>0，所以

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_1 x_2} < 0$$

因此　$f(x)=\frac{1}{x}$　在区间 $(0，+\infty)$ 上是减函数.

**计算 $\Delta x$ 和 $\Delta y$**

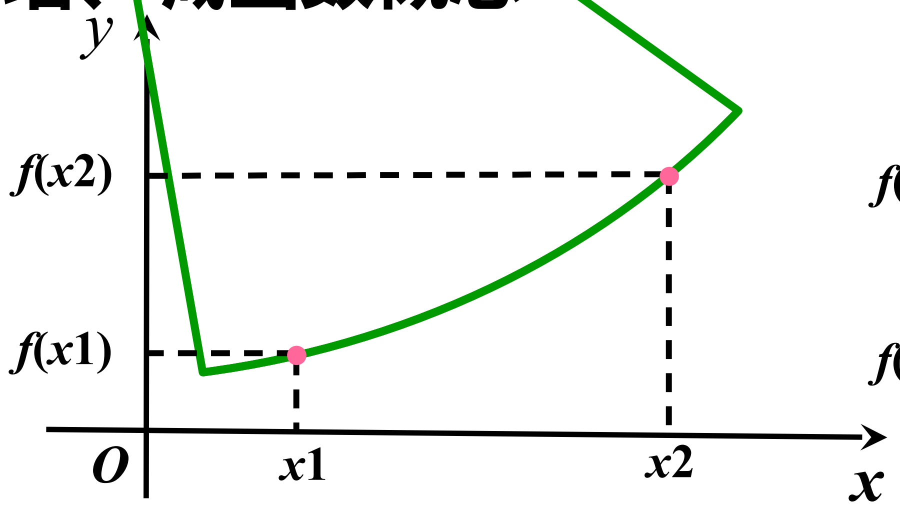
**计算 $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}$**

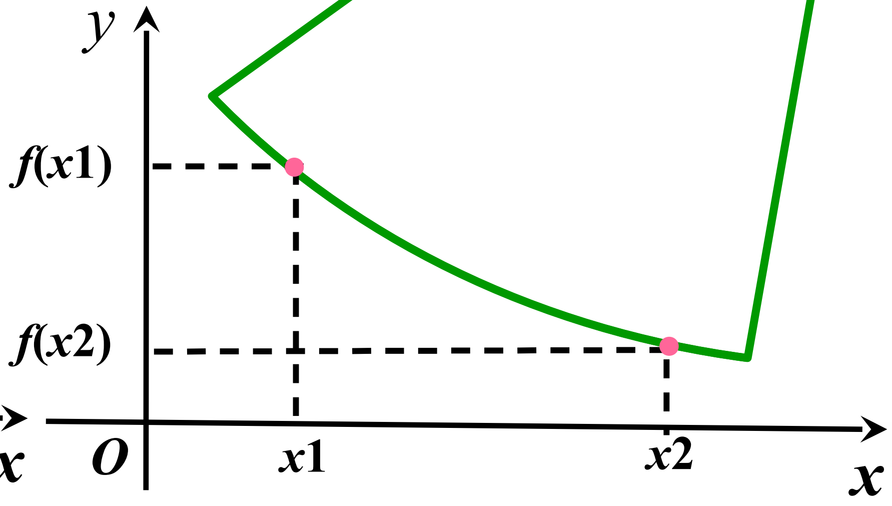
**当 $k>0$ 时，函数在这个区间上是增函数；**
**当 $k<0$ 时，函数在这个区间上是减函数.**

练习　证明函数　$f(x)=\frac{3}{x}$　在区间 (-∞，0) 上是减函数.

# 课堂小结

## 1. 增、减函数概念



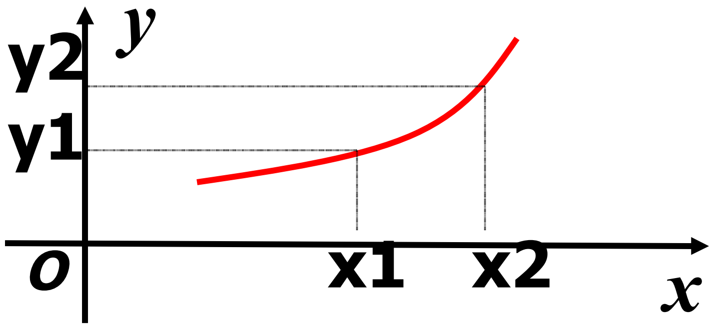
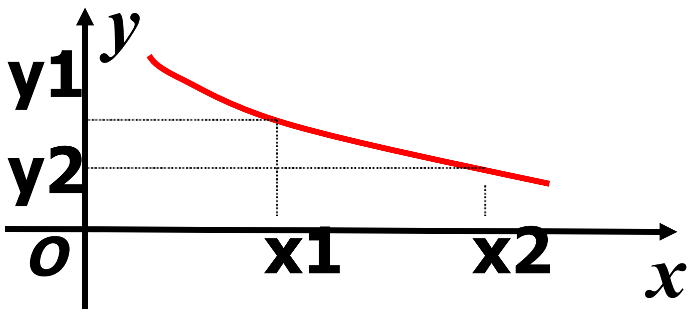




**增函数：** 在给定的区间上任取 $x1$， $x2$ $(x_1 \neq x_2)$ 函数 $f(x)$ 在给定区间上为增函数的充要条件是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$，这个给定的区间就为单调增区间。

**减函数：** 在给定的区间上任取 $x1$， $x2$ $(x_1 \neq x_2)$ 函数 $f(x)$ 在给定区间上为减函数的充要条件是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$，这个给定的区间就为单调减区间。

# 课堂小结

**2. 比较增函数和减函数**

| | 增函数 | 减函数 |
|---|---|---|
| 图象 |  |  |
| 图象特征 | 自左至右，图象上升． | 自左至右，图象下降． |
| 数量特征 | y 随 x 的增大而增大．当 x1 ＜ x2 时， y1 ＜ y2 | y 随 x 的增大而减小．当 x1 ＜ x2 时， y1 ＞ y2 |

3. 证明函数单调性的步骤：

（1）计算 $\Delta x$ 和 $\Delta y$；

（2）计算 $k=$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ；

当 $k>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在这个区间上是增函数

；

当 $k<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在这个区间上是减函数

.

谢谢观看！