



26.1 函数的分析作图法

泰山护理职业学院

李辉



一、引入

分析作图法是从整体上描绘出函数图像，能反映函数曲线整体的变化趋势。

要比较准确地描绘函数的图形。我们首先利用函数的一阶、二阶导数，分析其整体的性态，然后再用其特殊点作图。



二、函数分析作图法的一般步骤

- (1) 确定函数的定义域;
- (2) 求函数的一阶和二阶导数, 求出一阶、二阶导数为零的点, 求出一阶、二阶导数不存在的点;
- (3) 列表分析, 确定曲线的单调性和凹凸性;
- (4) 确定曲线的渐近性;
- (5) 确定并描出曲线上极值对应的点、拐点、与坐标轴的交点、其它点;
- (6) 连接这些点画出函数的图形.



三、例题

例 1 画出函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$(2) f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1), \quad f''(x) = 6x - 2 = 2(3x-1).$$

$$f''(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1).$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1/3, 1$; 令 $f''(x)=0$ 得 $x=1/3$.

(3) 曲线形态分析表:

x	$(-\infty, -1/3)$	$-1/3$	$(-1/3, 1/3)$	$1/3$	$(1/3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↗ ∩	$\frac{32}{27}$ 极大	↘ ∩	$\frac{16}{27}$ 拐点	↘ U	0 极小	↗ U

(4) 特殊点的函数值: $f(0)=1, f(-1)=0, f(3/2)=5/8$.



例题



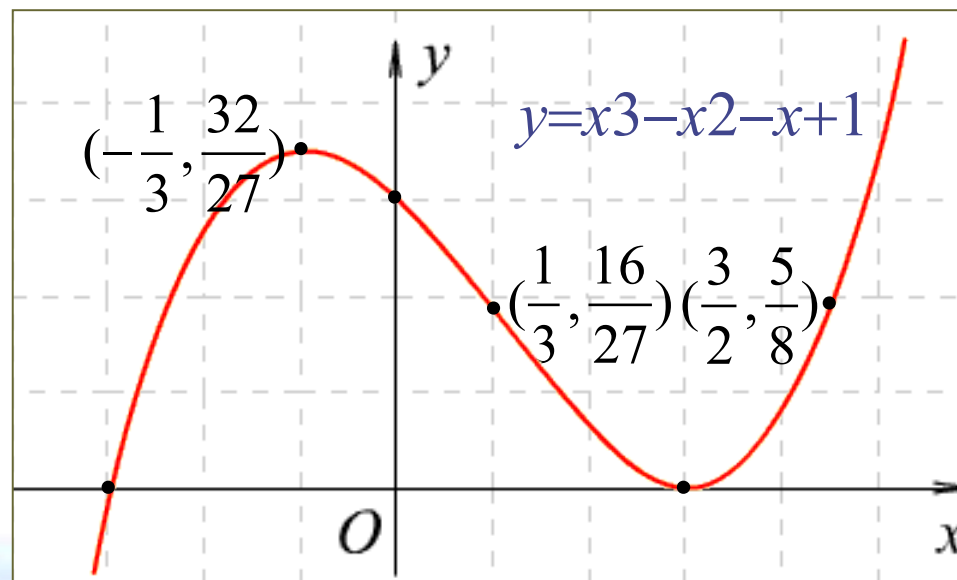
例 1 画出函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解 曲线性态分析表:

x	$(-\infty, -1/3)$	$-1/3$	$(-1/3, 1/3)$	$1/3$	$(1/3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f(x)$	$\nearrow \cap$	$\frac{32}{27}$ 极大	$\searrow \cap$	$\frac{16}{27}$ 拐点	$\searrow \cup$	0 极小	$\nearrow \cup$

特殊点的函数值: $f(0)=1$, $f(-1)=0$, $f(3/2)=5/8$.

描点连线画出图形.



例题

例 2 作函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的图形.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,
 $f(x)$ 是偶函数, 图形关于 y 轴对称.

$$(2) f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad f''(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=0$; 令 $f''(x)=0$, 得 $x=-1$ 和 $x=1$.

(3) 曲线性态分析表:

x	0	(0, 1)	1	(1, +∞)
$f'(x)$	0	—	—	—
$f''(x)$	—	—	0	+
$y=f(x)$ 的图形	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 极大	↘ ∩	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}e}$ 拐点	↘ U

(4) 曲线有水平渐近线 $y=0$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}x^2}} = 0$$



例题



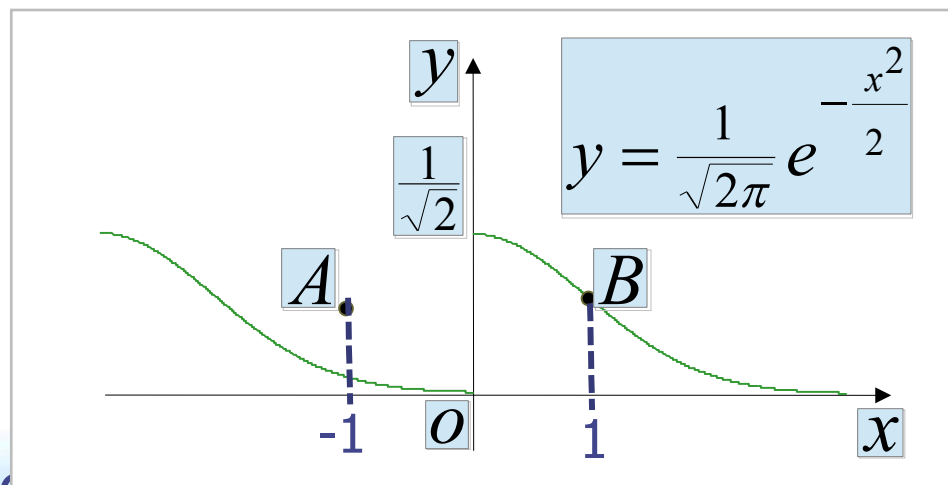
例作函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的图形.

解 函数性态分析表:

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$y=f(x)$ 的图形	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 极大	$\searrow \cap$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ 拐点	$\searrow \cup$

$y=0$ 是曲线的水平渐近线.

先作出区间 $(0, +\infty)$ 内的图形, 然后利用对称性作出区间 $(-\infty, 0)$ 内的图形.





函数分析作图法的一般步骤

- (1) 确定 $y=f(x)$ 的定义域;
- (2) 讨论函数的单调性、凹凸性, 求出极值点和拐点;
- (3) 求函数的水平渐近线和垂直渐近线;
- (4) 讨论函数的奇偶性、周期性;
- (5) 描点.

综合以上性质可描绘函数的图形.

谢谢观看！