

21.3 利用单调性证明不等式(二)

泰山护理职业学院

李辉



利用单调性证明不等式

例 1 证明：当 $x>0$ 时， $ex > 1+x$.

证明 令 $f(x)=ex-1-x$, 则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、可导
，且 $f'(x)=ex-1$

当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$, 函数在 $[0,+\infty)$ 上单调增加

所以 $\forall x \in [0,+\infty)$, 有 $f(x)>f(0)=0$, 即 $ex-1-x>0$

所以当 $x>0$ 时， $ex > 1+x$

例 2 当 $x > 0$ 时,试证 $x > \ln(1 + x)$ 成立.

证 设 $f(x) = x - \ln(1 + x)$, 则 $f'(x) = \frac{x}{1 + x}$.

⊖ $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续,且在 $(0, +\infty)$ 内可导, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加; ⊖ $f(0) = 0$,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0)$, 即 $x - \ln(1 + x) > 0$,

故 $x > \ln(1 + x)$.

例3 试证方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 只有一个实根.

思路: 从几何上看, 某区间上的单调的连续曲线, 从

x 轴的一侧变到另一侧时, 曲线与 x 轴有唯一交点,

即方程 $f(x) = 0$ 在该区间内有且仅有一个实根.

证 令 $f(x) = x^5 + x - 1$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$

内连续, 可导, 且 $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$,

$\therefore$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $f(x)$ 为增函数

又 $\ominus f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$,

$\therefore y = f(x)$ 与 x 轴有且仅有一个交点.

即方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 有且仅有一个实根.



例 4 证明: $1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) > \sqrt{1 + x^2} \quad (x > 0).$

证明 令 $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$

则 $f'(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) > 0 \quad (x > 0)$

所以: 当 $x > 0$ 时, $y' > 0$, 函数在 $[0, +\infty)$ 上单调增加

又因为 $f(0) = 0$, 所以 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) > f(0)$, 即

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} > 0$$

所以 $1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) > \sqrt{1 + x^2} \quad (x > 0).$



利用单调性证明不等式步骤：

1. 构造辅助函数，
2. 借助导数的符号判别函数的单调性，得出结论。

谢谢观看！