

9.5 导数的几何意义



泰山护理职业学院

李辉

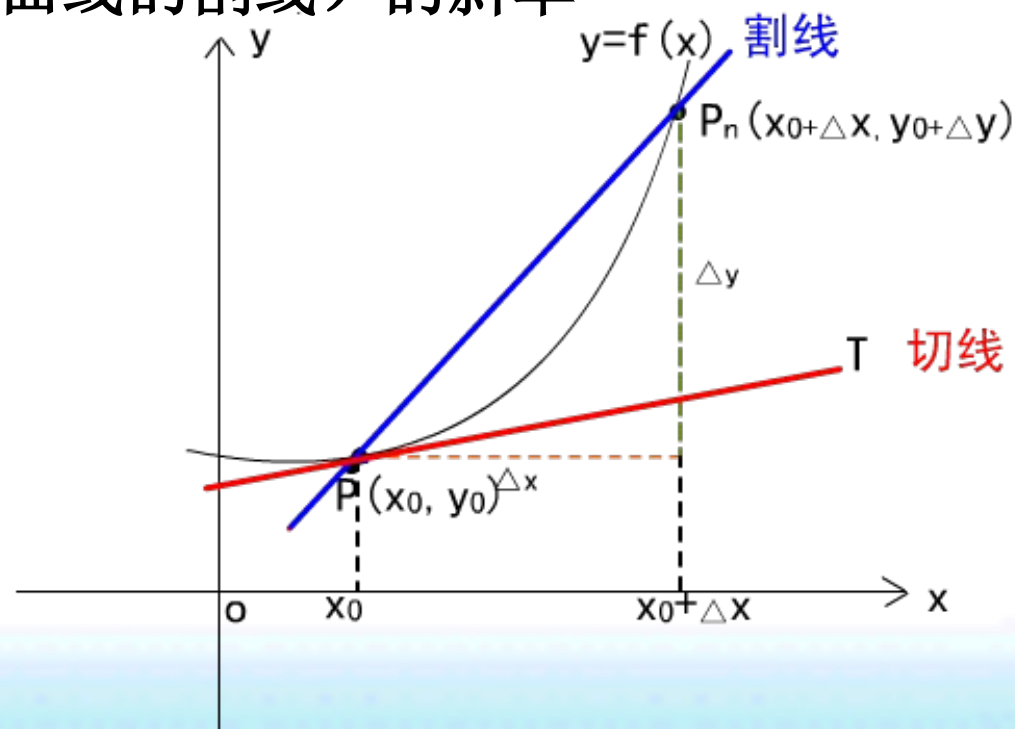
复 习

导数的定义

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

其中：(1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 表示“平均变化率”

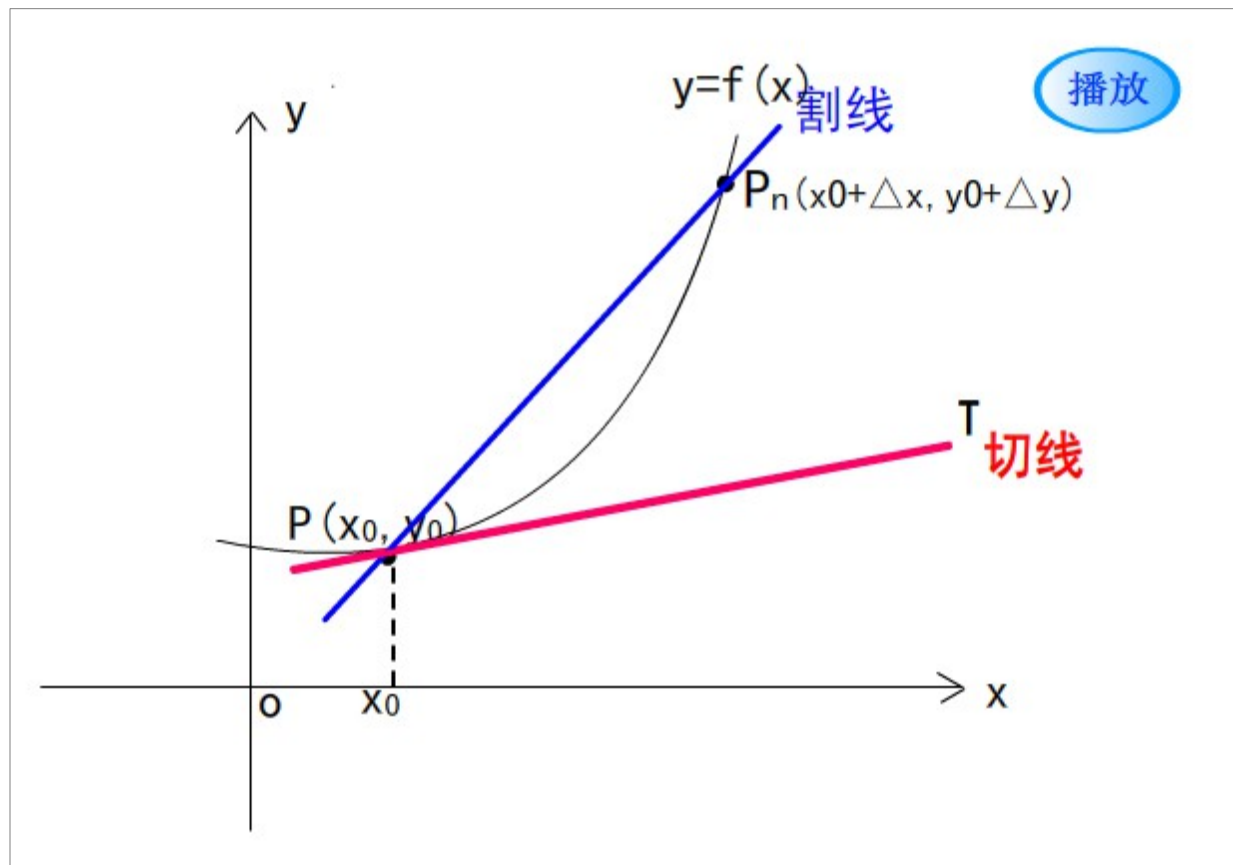
几何意义是 表示曲线上两点连线 **ppn**（曲线的割线）的斜率。



动画演示割线变化趋势

当动点 P_n 趋近于定点 P 时，
割线 PP_n 趋近于点 P 处的切线

■



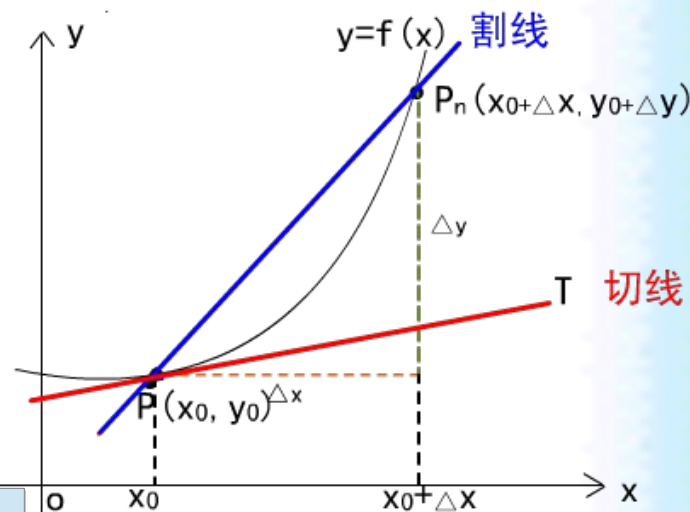
1. 割线斜率与切线斜率的关系

由切线的定义知，当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，割线 PP_n 趋近于切线 PT .

割线 PP_n 的斜率 $k_{pp_n} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，切线 PT 的斜率就是 $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

即切线斜率 $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$



2、导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

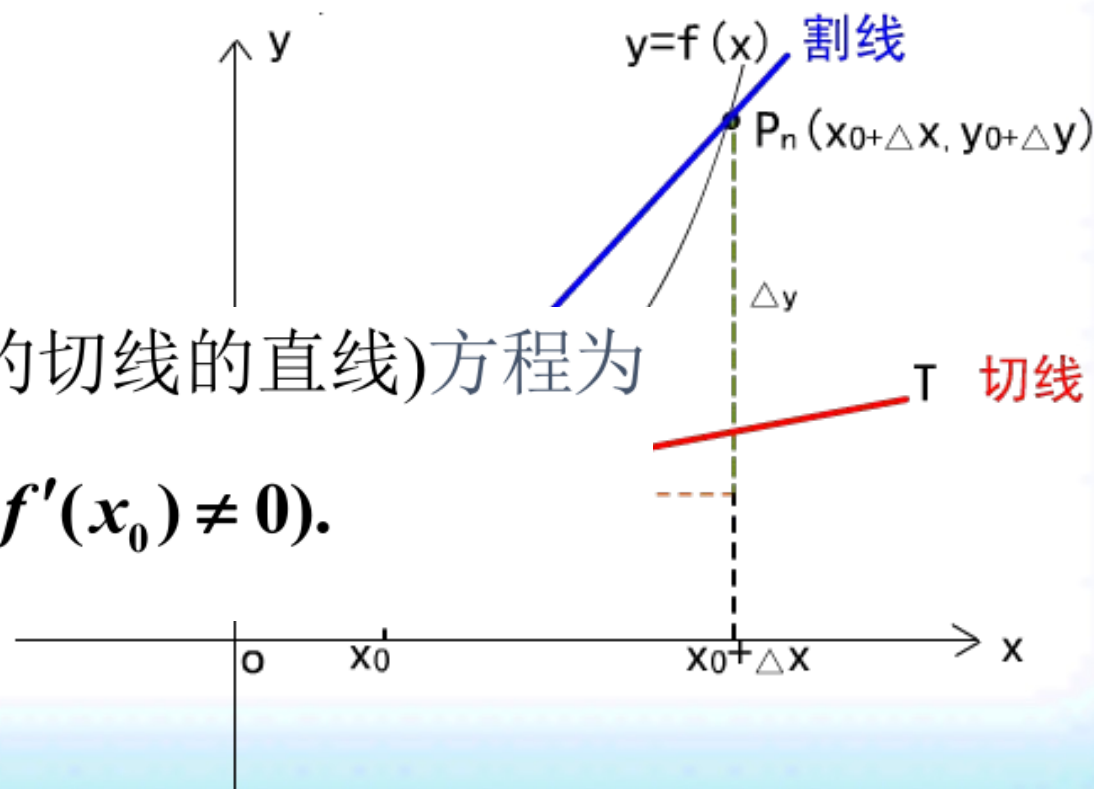
也就是说, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率是

$f'(x_0)$ 相应地, 切线方程为:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

法线 (过曲线上一点且垂直于该点处的切线的直线) 方程为

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$



3、导数的几何意义的应用

例 1: 求函数 $y=3x^2$ 在点 $(1,3)$ 处的切线斜率.

$$\text{解: } y|_{x=1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(1+\Delta x)^2 - 3 \cdot 1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x}$$

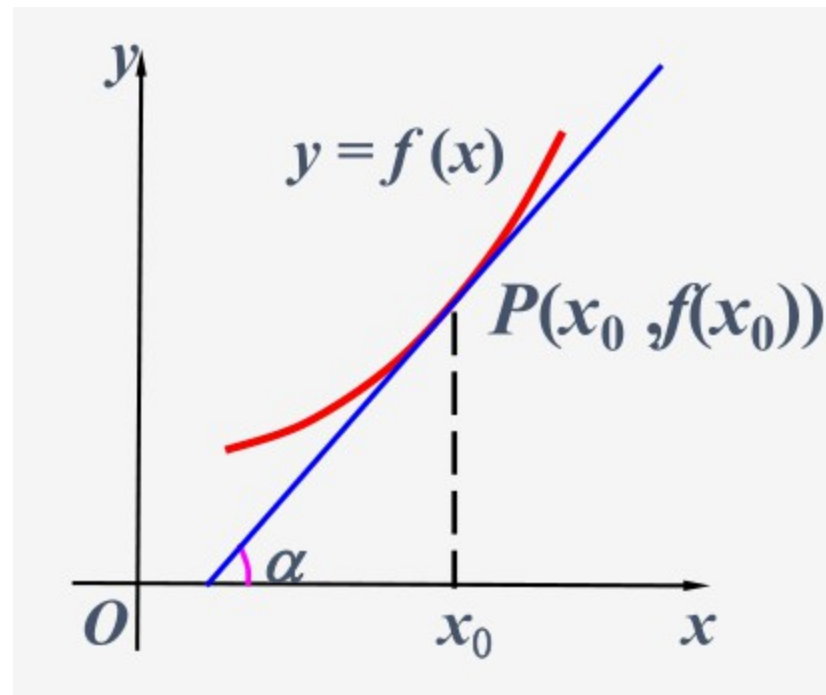
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3(\Delta x + 2) = 6$$

所以切线斜率 $k=6$



导函数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率，





由导数求切线方程

曲线 $y = f(x)$ 上点 $P_0 (x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

谢谢观看！