8.1　函数、极限与连续典型例题（二）

泰山护理职业学院

李辉

前面我们学习了函数的连续性、间断点及其分类、闭区间上连续函数的性质，本讲再通过三个典型例题对所学内容进行加深和巩固。

例1.设函数$f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x<0 \\ a-1, & x=0 \\ \dfrac{\ln(1+bx)}{x}, & x>0. \end{cases}$

$\lim\limits_{x ❈ x_0} f(x) = A$ � $\lim\limits_{x \quad x_0} f_{左}(x)$ $\quad \lim\limits_{x \quad x_0} f_{右}(x)$=A

(1)当a,b为何值时，$f(x)$在$x=0$处有极限？

（2）当a,b为何值时，$f(x)$在$x=0$处连续？

函数 y=f(x) 在点 x0 连续必须同时满足以下三个条件：

（1）函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，即$y=f(x_0)$ 存在

（2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在；

（3） x_0处极限值等于函数值，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例1.设函数$f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x<0 \\ a-1, & x=0 \\ \dfrac{\ln(1+bx)}{x}, & x>0. \end{cases}$

(1)当a,b为何值时，$f(x)$在$x=0$处有极限？

（2）当a,b为何值时，$f(x)$在$x=0$处连续？

解：　由已知有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-2)=-2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+bx)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{bx}{x}=b$$

$$f(0)=a-1$$

(1)令$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

得当$b=-2$（a为任意值）时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在

（2）进一步，令$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-2=f(0)$,

即　-2=a-1　，得　a= -1

当$a=-1$，$b=-2$时,有

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=-2$成立，

即$f(x)$在$x=0$处连续

例2.讨论$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \dfrac{2(\sqrt{x+1}-1)}{x}, & x>0. \end{cases}$的连续性

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$ 在 x_0 处左连续且右连续

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

例2.讨论$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{2(\sqrt{x+1}-1)}{x}, & x>0.\end{cases}$ 的连续性

解：$f(x)$在（$-\infty,0$）及（$0,+\infty$）上是初等函数，

所以$f(x)$在（$-\infty,0$）及（$0,+\infty$）内分别连续.

再讨论$f(x)$在$x=0$处的连续性，

因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$, 左连续

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2(\sqrt{x+1}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}x}{x}=1=f(0)$ 右连续

所以$f(x)$在$x=0$处既是左连续又是右连续，

故$f(x)$在$x=0$处连续.

综上所述，$f(x)$在（$-\infty,+\infty$）都连续.

例3.求函数$f(x)=\dfrac{x}{|\sin x|}$的间断点，并判断间断点的类型.

间断点x_0		$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B\ (A,B\in R)$	
第一类	可去	$A=B\neq f(x_0)$	左右极限同时存在
	跳跃	$A\neq B$	
第二类	左右极限至少有一侧不存在		

例3.求函数$f(x)=\dfrac{x}{|\sin x|}$的间断点，并判断间断点的类型.

解：因为当$x=k\pi(k\in Z)$时，$|\sin x|=0$，这时函数无定义，

所以$x=k\pi(k\in Z)$是函数$f(x)$的间断点.

在$x=k\pi(k\neq 0,k\in Z)$处，有 $\lim\limits_{\substack{x\to k\pi\\(k\neq 0)}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to k\pi\\(k\neq 0)}}\dfrac{x}{|\sin x|}=\infty$,

所以$x=k\pi(k\neq 0，k\in Z)$为$f(x)$的第二类间断点.

在$x=0$处，有$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{-\sin x}=-1$　　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x}=1$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，

所以$x=0$是$f(x)$的第一类间断点，且为 跳跃间断点.

课堂小结

本节课通过三个典型例题对函数的连续性、间断点及其分类、闭区间上连续函数的性质等内容进行加深和巩固．

谢谢观**看**！