

2.5 无穷小量

泰山护理职业学院

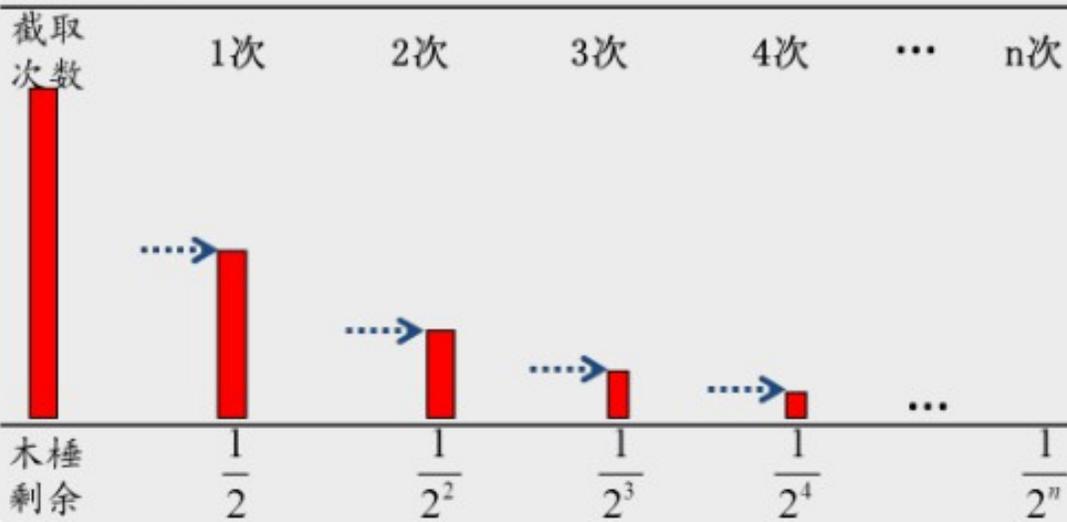
李辉

问题引入



一尺之棰，日取其半，万世不竭

—庄子·天下篇



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

极限值等于0

1 . 无穷小的概念

如果当自变量 $x \rightarrow x_0$ (或 ∞) 时, 如果函数 $f(x)$ 的极限为 0

则称函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ (或 ∞) 时的无穷小量, 简称无穷小, 通常用希腊字母

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

定义中的 $x \rightarrow x_0$ 可推广到 $x \rightarrow \infty$ 、 $\pm\infty$ 、 x_0^+ 、 x_0^- 等

1 . 无穷小的概念

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0,$$

函数 $x - 1$ 当 $x \rightarrow 1$ 时为无穷小;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

函数 $\frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1$$

函数 $x - 1$ 当 $x \rightarrow 2$ 时是无穷小量吗?
?

1 . 无穷小的概念

- 无穷小量总是与自变量 x 变化过程有关 .

如 $\frac{1}{x}$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小量 , 当 x 趋于任何一个常数时 , 它不是无穷小量 .

- 常数的极限是它本身 , 所以非常小的数如 10-100 不是无穷小 , 常数中只有零是无穷小 .

2 . 无穷小的性质

在同一个变化过程中，无穷小量具有如下性质：

(1) 有限个无穷小量的**代数和**仍然是无穷小量； $\alpha+\beta-\gamma$

(2) 有限个无穷小量的**积**仍然是无穷小量； $\alpha\beta$

(3) 常数 (或有界变量) 与无穷小量的**积**仍然是无穷小量 . $k\alpha$

2 . 无穷小的性质

利用无穷小的性质求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sin x \right) = 0$$

无穷小

有界量 $|\sin x| \leq 1$

3. 无穷小与极限的关系

在自变量的某一变化过程中，函数 $f(x)$ 的极限为 A 的充要条件是 $f(x)$ 可以表示成 A 与一无穷小量之和。即

函数极限与无穷小的关系：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$$

其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ 。

判断下列变量在相应的变化过程中是否是无穷小量？

(1) $x^2 + 10x$ ($x \rightarrow 0$)

是

$x^2 + 10x \rightarrow 0$

(2) $\ln x$ ($x \rightarrow 0^+$)

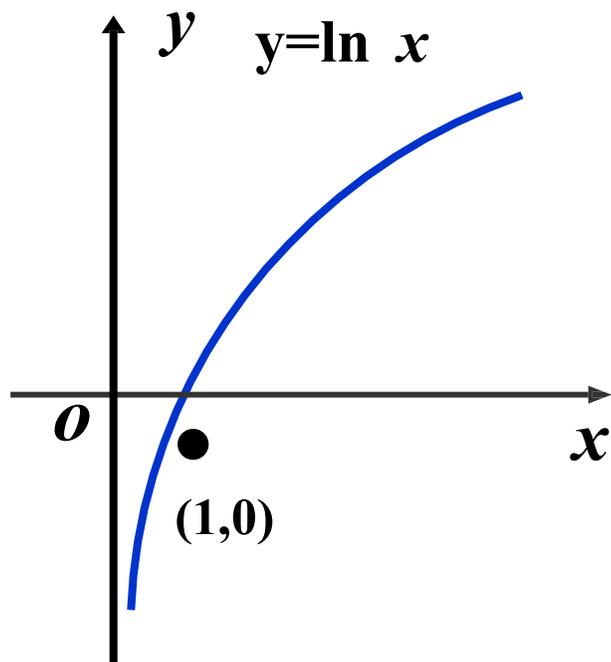
否

$\ln x \rightarrow -\infty$

(3) $\ln x$ ($x \rightarrow 1^+$)

是

$\ln x \rightarrow 0$



无穷小量是伴随自变量的变化趋势而言

巩固练习

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

解:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

无穷小量 有界量

$$= 0$$

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \cos x \right)$.

解:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \cos x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \cos x \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

性质3

巩固练习

自变量在怎样的变化过程中，下列函数为无穷小量？

$$(1) y = \frac{1}{x-1}; \quad (2) y = 2x-1;$$

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0$, 所以当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x-1}$ 为无穷小.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x-1) = 0$, 所以当 $x \rightarrow \frac{1}{2}$ 时, $2x-1$ 为无穷小.

无穷小的概念

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

定义中的 $x \rightarrow x_0$ 可推广到 $x \rightarrow \infty$ 、 $\pm\infty$ 、 x_0^+ 、 x_0^- 等

无穷小量是伴随自变量的变化趋势而言





谢谢观看！