

10.3 直线与平面的位置关系

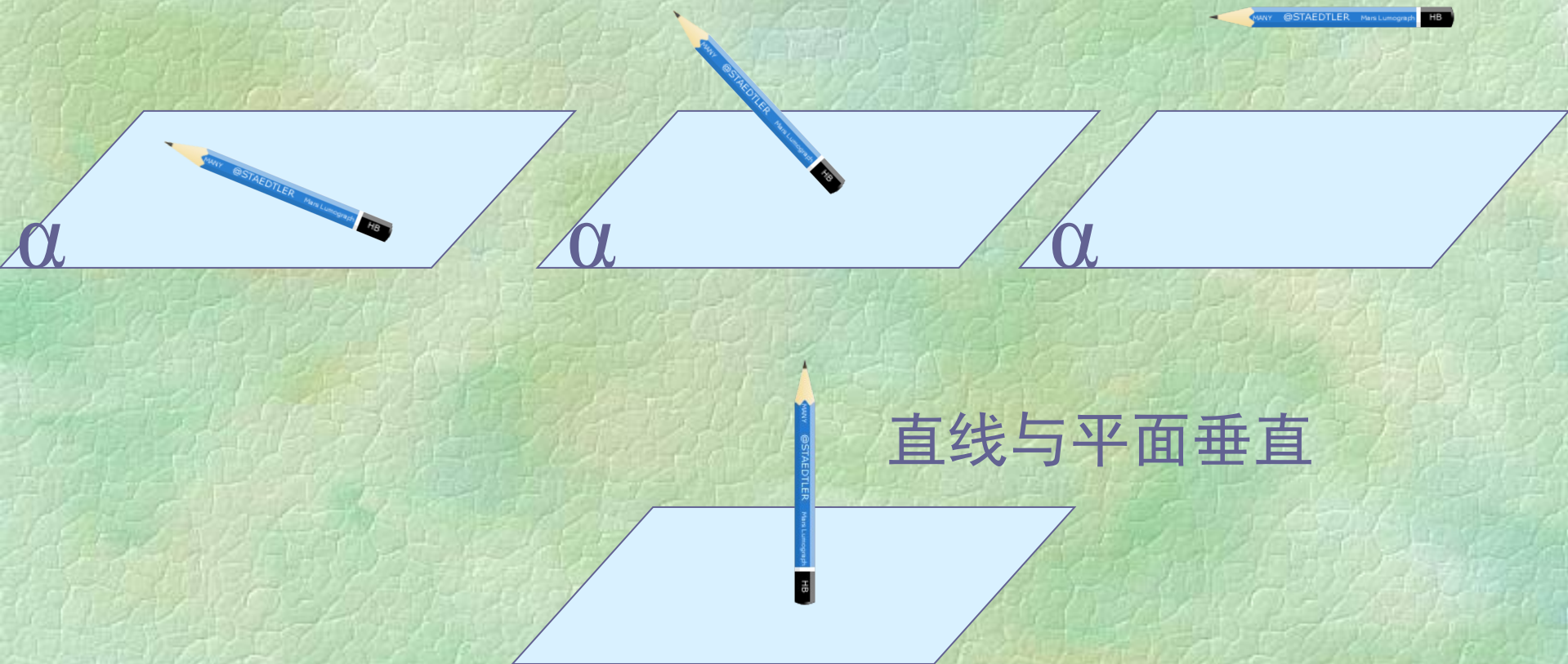
垂直关系

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

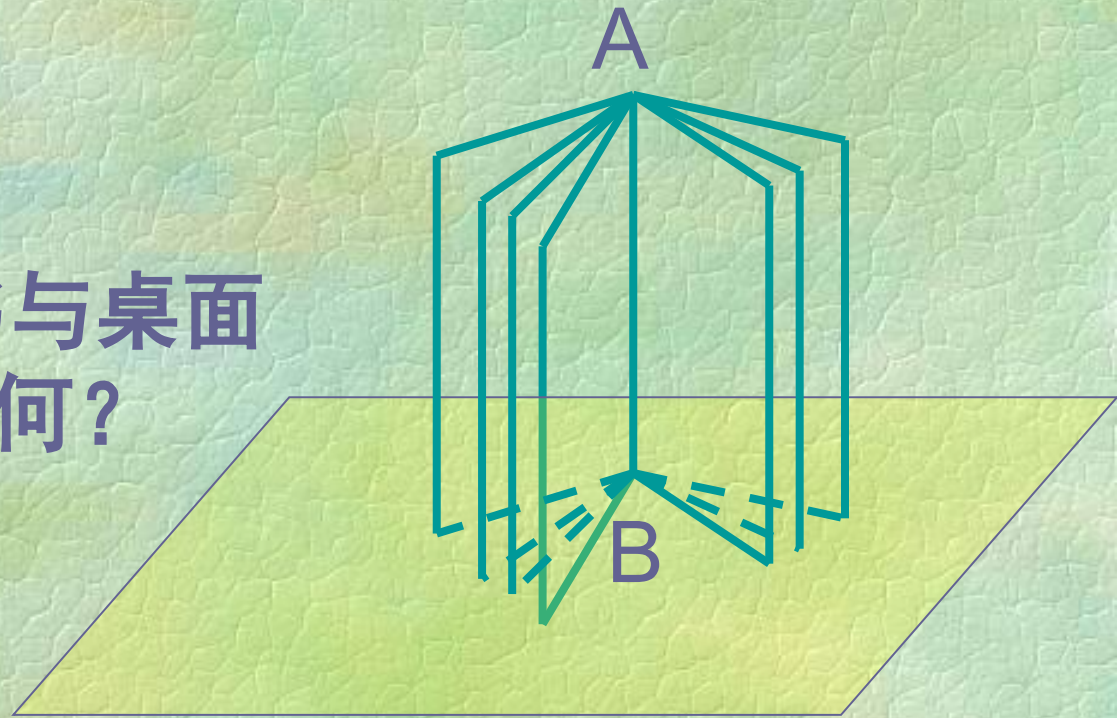


一支笔所在直线与一个作业本所在的平面，可能有三位置关系：



将书页打开直立在桌面上，观察书脊 AB 和桌面的位置关系，给人以什么感觉？

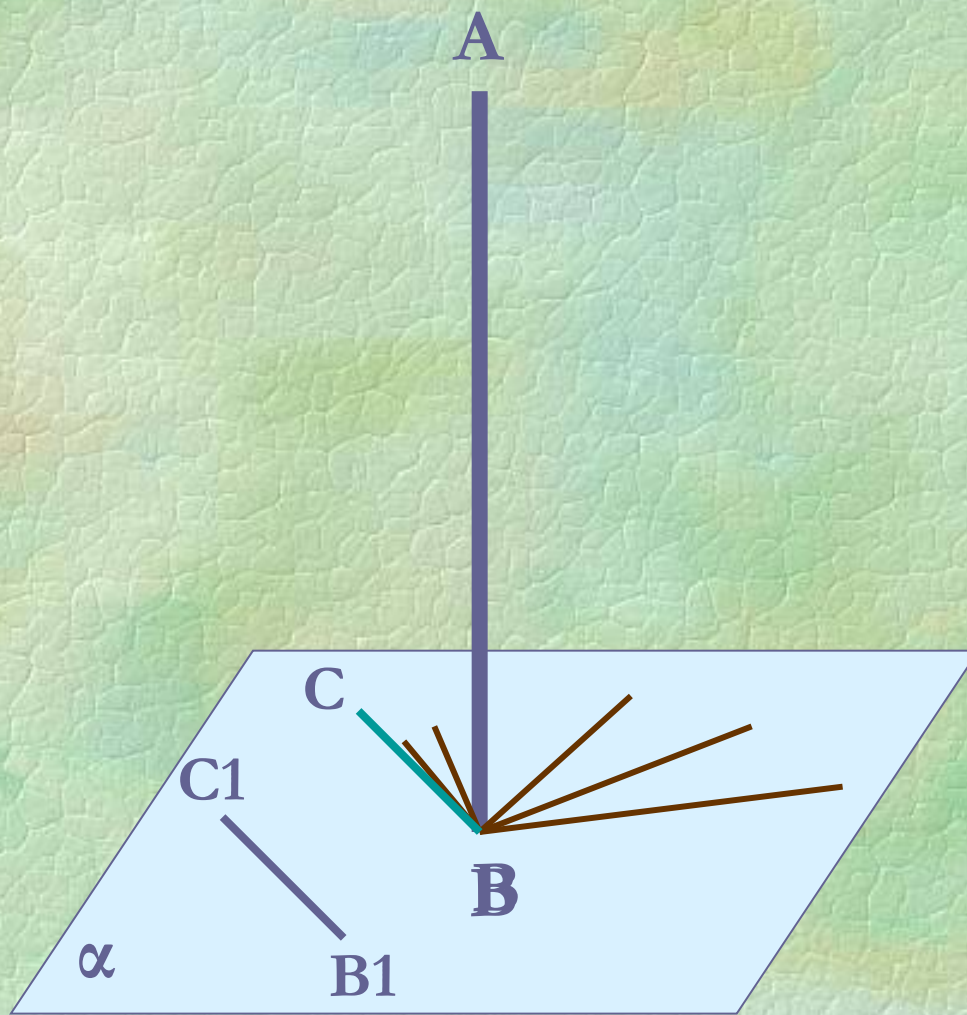
书脊 AB 和每页书与桌面的交线的位置关系如何？



此时，书脊 AB 和桌面内的每条直线都垂直吗？

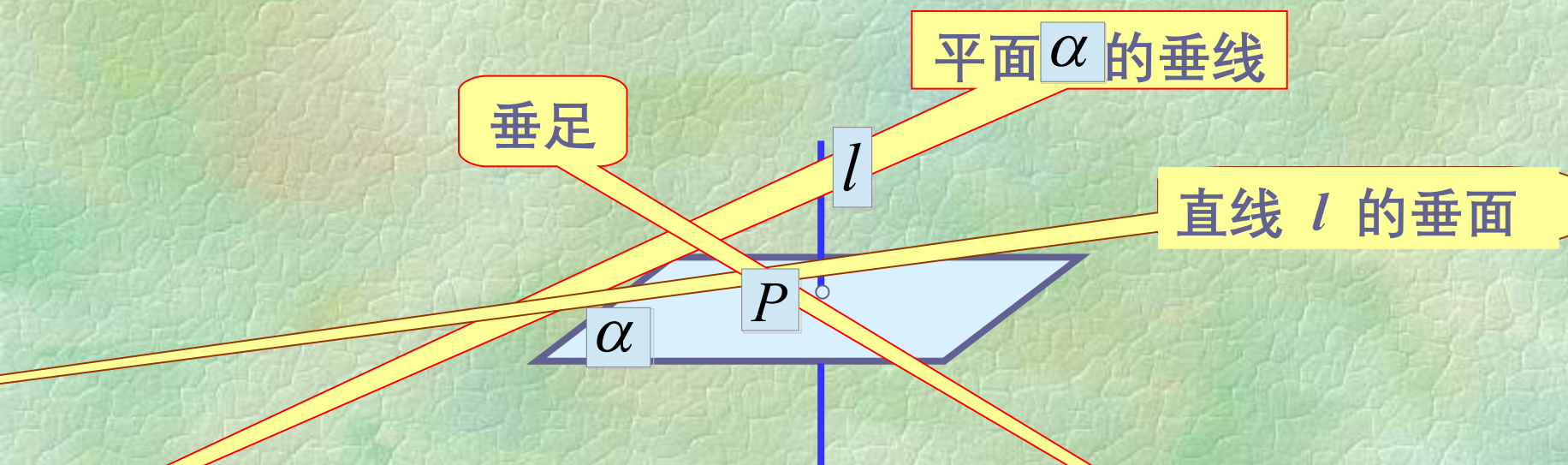
思考？

一条直线 与一个平面
垂直的意义是什么？



一、直线与平面垂直的定义

如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们说直线 l 与平面 α 互相垂直记作 $l \perp \alpha$



反之，如果一条直线与一个平面垂直，则这条直线与平面内的任意一条直线都垂直。

生活中的线面垂直现象：



旗杆与地面垂直

生活中有很多直线与平面垂直的实例，你能举出几个吗？



大桥的桥柱与水面垂直

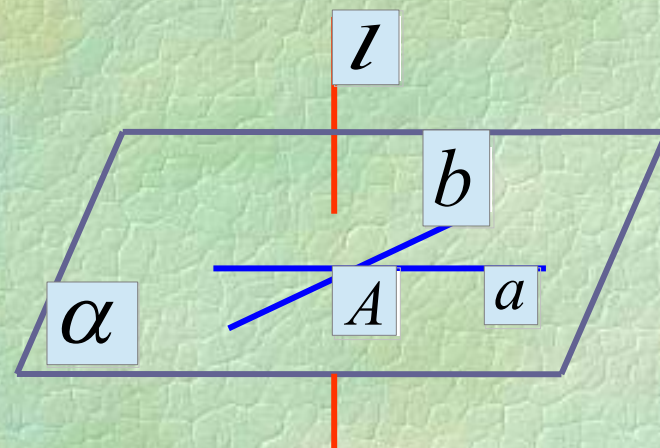


军人与地面垂直

二、直线与平面垂直判定定理：

一条直线与一个平面内两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直。

$$\left. \begin{array}{l} l \perp a \\ l \perp b \\ a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \cap b = A \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$$



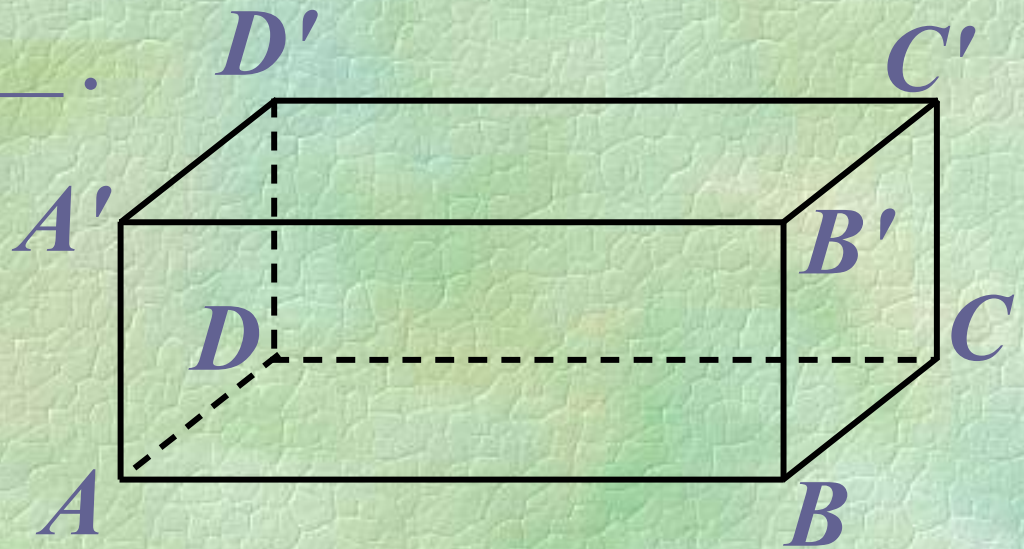
线不在多，相交就灵

作用：

判定直线与平面垂直。

练习

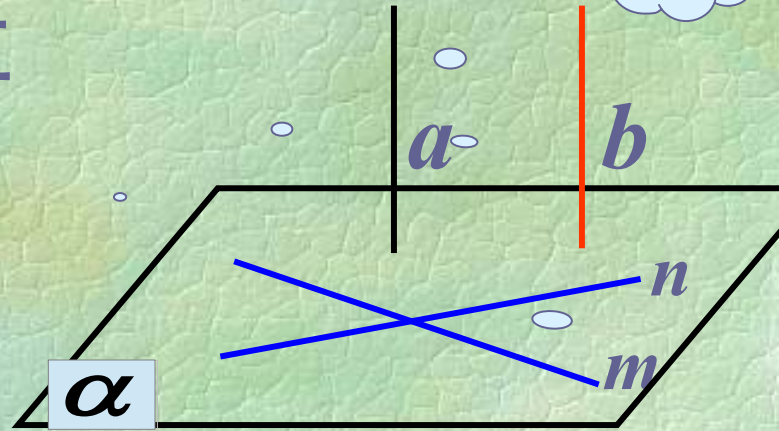
如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，
与平面 $B'C'CB$ 垂直的直线有 AB 、 $A'B'$ 、 DC 、 $D'C'$
； 平面 $ABCD$ 、平面 $A'B'C'D'$
与直线 AA' 垂直的平面有
。



例 3 已知 $a \parallel b$, $a \perp \alpha$, 求证: $b \perp \alpha$.

线面垂直 $\rightarrow$ 线线垂直 $\rightarrow$ 线面垂直

推论: 在两条平行直线中, 如果有一条垂直于一个平面, 那么另一条直线也垂直于这个平面



证明: 在平面 α 内作两条相交直线 m, n .

因为直线 $a \perp \alpha$, 根据直线与平面垂直定义知

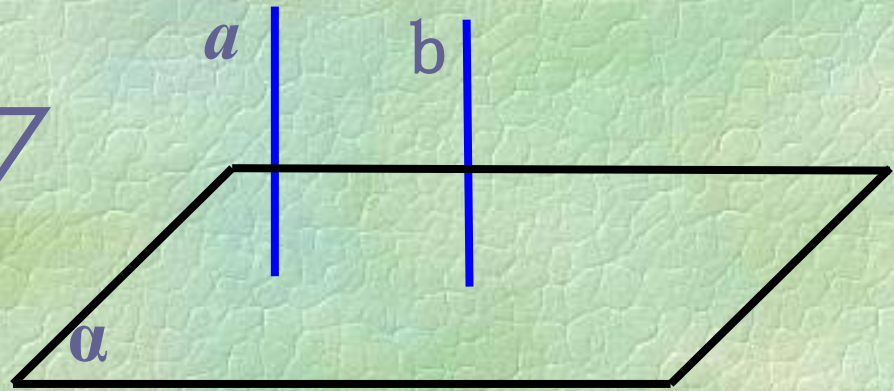
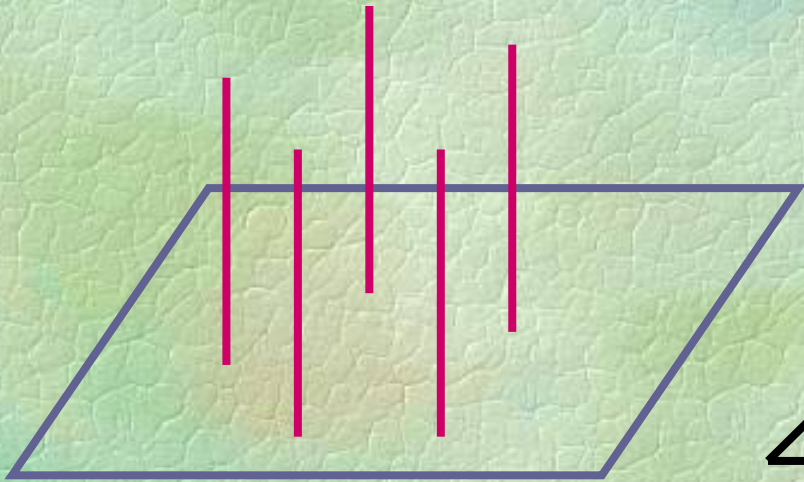
$$a \perp m, a \perp n$$

又因为 $b \parallel a$, 所以 $b \perp m, b \perp n$

又 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m, n$ 是两条相交直线,

所以 $b \perp \alpha$

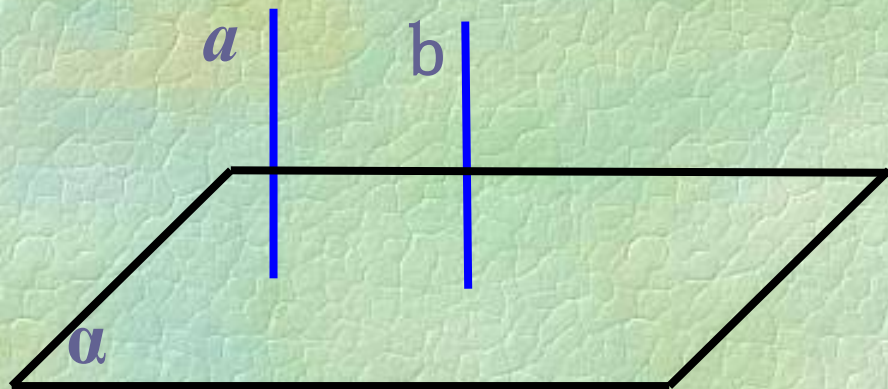
思考：一个平面的垂线有多少条？这些直线彼此之间具有什么位置关系？



如果直线 a ， b 都垂直于平面 α ，由观察可知 $a \parallel b$.

三、直线与平面垂直的性质定理

如果两条直线同时垂直于同一个平面，那么这两条直线平行。

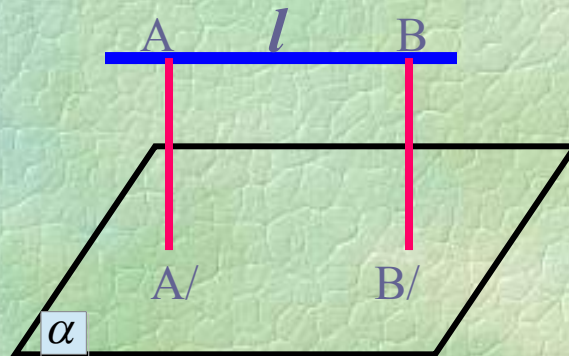


用符号语言可表述为：

$$a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a // b$$

直线到平面的距离

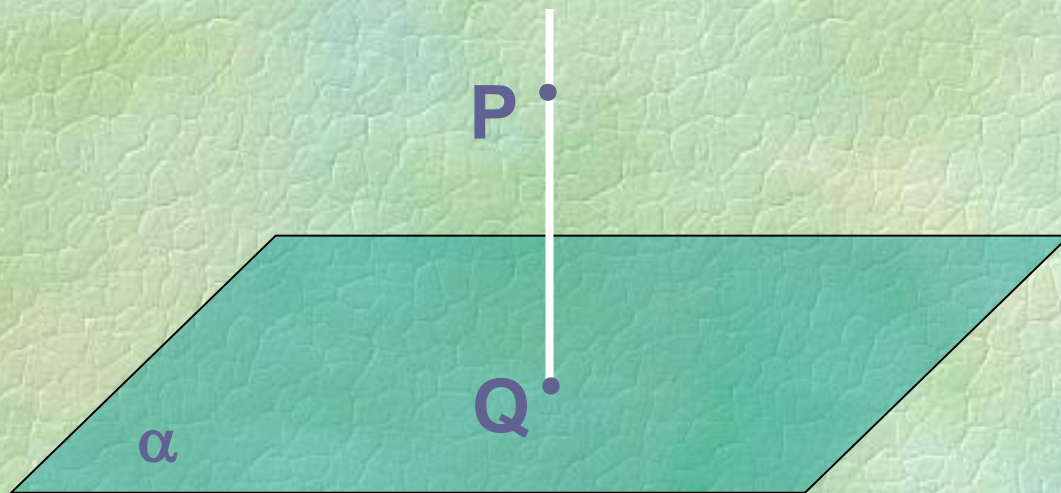
一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到平面的距离，叫做这条直线到平面的距离。



四、斜线在平面内的射影

(1) 点在平面内的射影

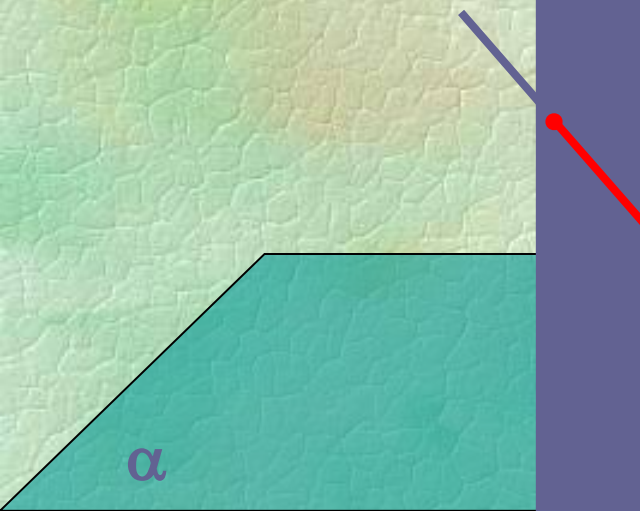
过一点向平面引垂线，垂足叫做这点在这个平面内的射影。



(2) 平面的

段

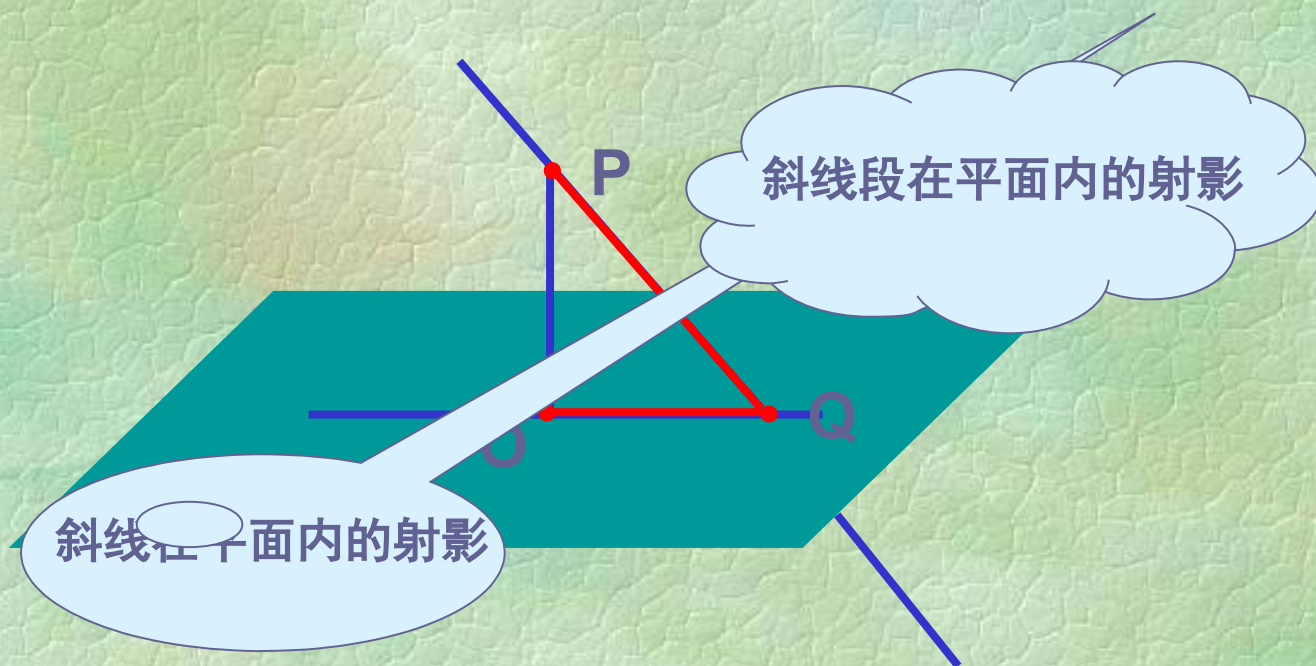
一条直线和一
时，这条直线
点叫斜足．从
斜足间的线段



点 P 到平面的斜线段

(3) 斜线在平面内的射影、斜线段在平面内的射影.

从斜线上斜足以外的一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做斜线在平面内的射影.

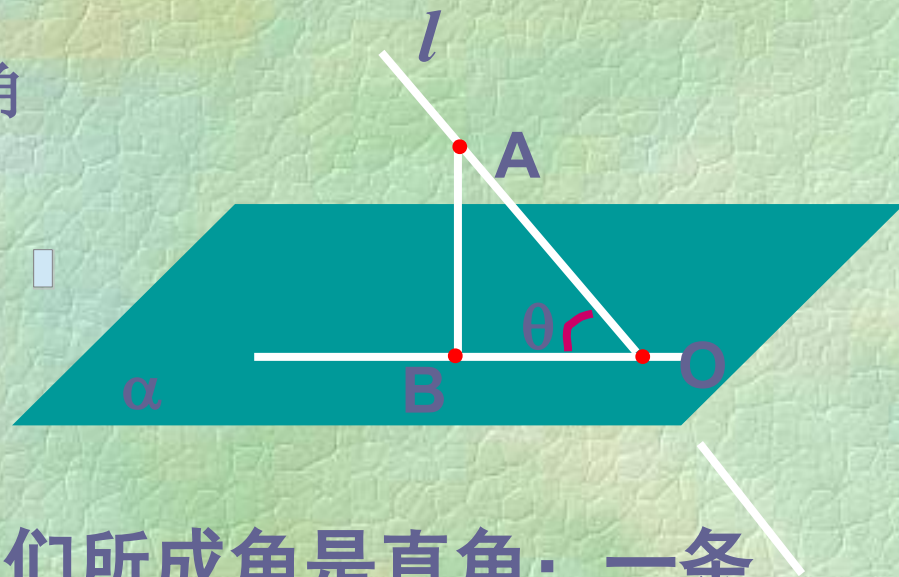


(3) 直线和平面所成的角

平面的一条斜线和它在这个平面内的射影所成的锐角，叫做这条斜线和这个平面所成的角。

$\angle AOB$ (记为 θ) 是 l 与 α 所成的角

$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$



一条直线垂直于一个平面，它们所成角是直角；一条直线和一个平面平行或在平面内，它们所成角是 0° 的角。

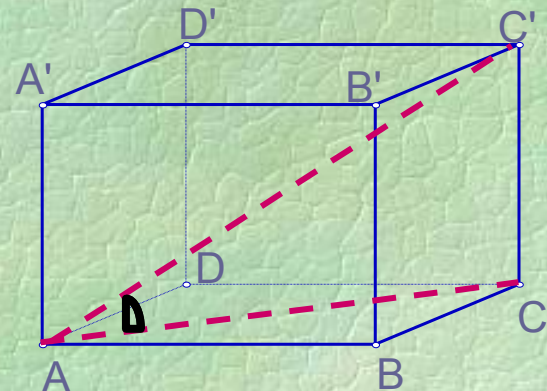
直线和平面成角 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

斜线和平面成角 $0^\circ < \theta < 90^\circ$

例 4 已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB=2, AD=1, AA'=1$, 求直线 AC' 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.

解: 连接 AC .

因为 $CC' \perp ABCD$, 所以 AC 是 AC' 在平面 $ABCD$ 内的射影, 因此 $\angle CAC'$ 就是直线 AC' 与平面 $ABCD$ 所成的角



在矩形 $ABCD$ 中, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

在 $Rt\triangle ACC'$ 中, $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{6}$

所以 $\sin \angle CAC' = \frac{CC'}{AC'} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

因此直线 AC' 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值是

$$\frac{\sqrt{6}}{6}$$

例5 已知： AO 、 AB 分别是平面的垂线、斜线， O 和 B 分别是垂足和斜足， $l \subset \alpha, l \perp OB$.

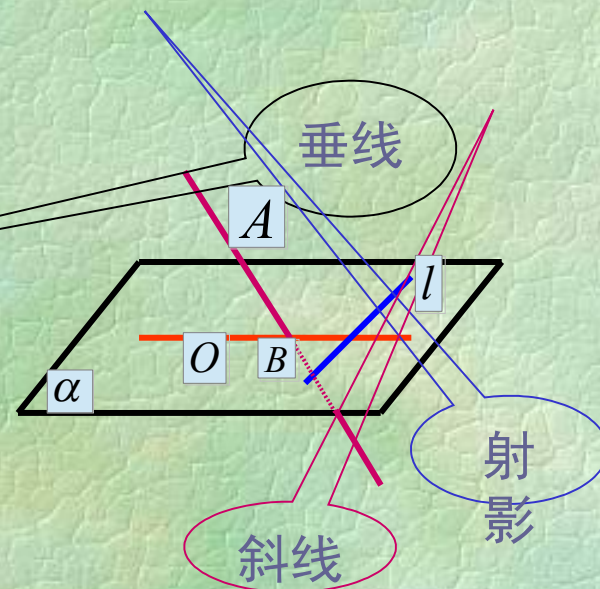
求证 $l \perp AB$

分析：要证线线垂直，通常转化为证线面垂直

证明
：

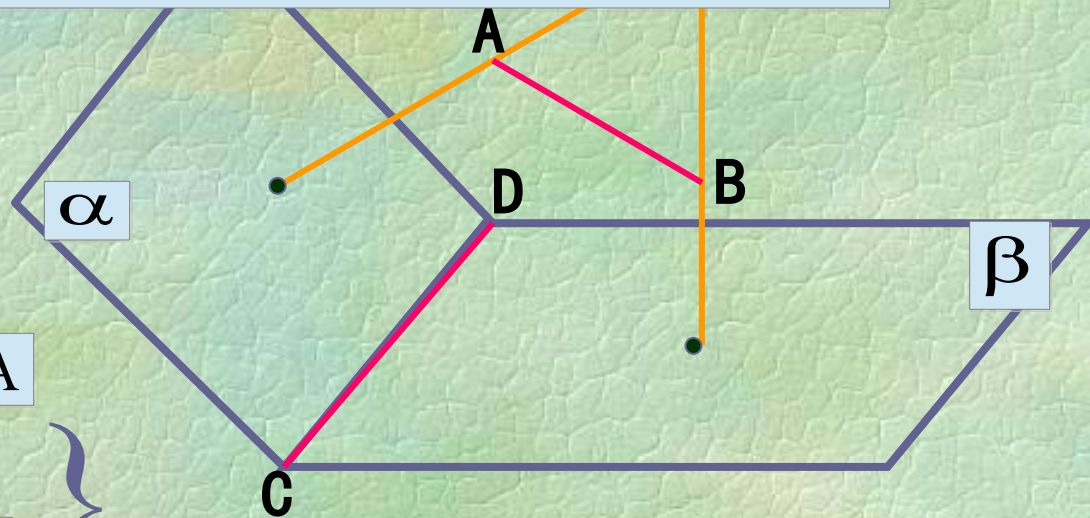
$$\left. \begin{array}{l} OA \perp \alpha \\ l \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} OA \perp l \\ OB \perp l \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} l \perp \text{平面} ABO \\ AB \subset \text{面} ABO \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp AB$$



练习

1. 已知: $\alpha \cap \beta = CD$, $EA \perp \alpha$, $EB \perp \beta$.
求证: $CD \perp AB$.



证明: $EA \perp \alpha$

$CD \subset \alpha$

$\Rightarrow CD \perp EA$

$EB \perp \beta$

$CD \subset \beta$

$\Rightarrow CD \perp EB$

$EA \cap EB = E$

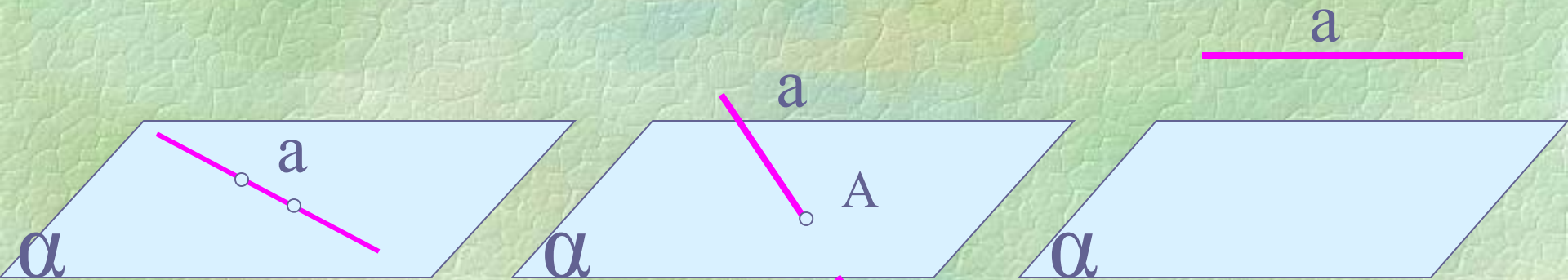
$\Rightarrow CD \perp$ 平面 EAB

$AB \subset$ 平面 EAB

$\Rightarrow CD \perp AB$

教学小结

一、直线和平面有哪些位置关系？



- (1) 直线在平面 α 内 $a \subset \alpha$ 有无数个交点
- (2) 直线与平面 α 相交 $a \cap \alpha = A$ 有且只有一个交点
- (3) 直线与平面 α 平行 $a // \alpha$ 无交点

二、直线与平面平行

1、直线与平面平行的判定定理

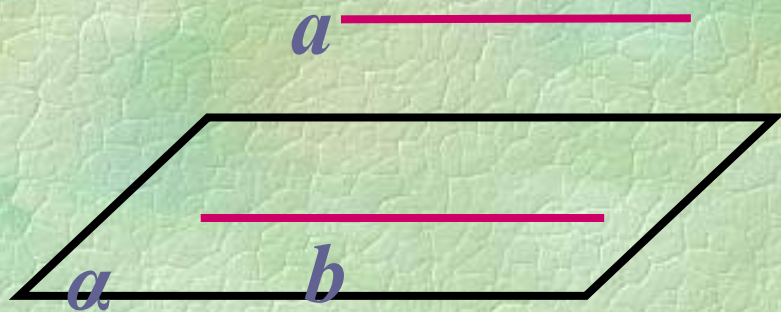
定理 若平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行。

该定理用符号语言表述

$$a \not\subset \alpha$$

$$b \subset \alpha$$

$$a // b \Rightarrow a // \alpha$$



教学小结

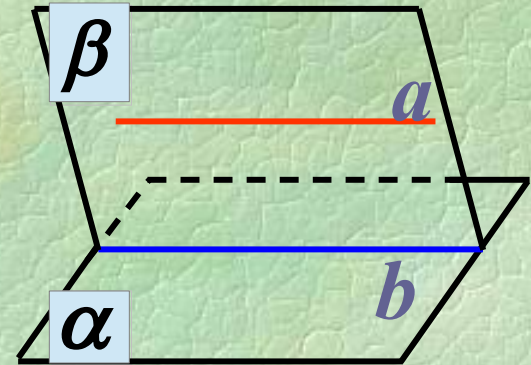
2. 直线与平面平行的性质定理

$$a // \alpha$$

$$a \subset \beta$$

$$\alpha \cap \beta = b$$

$$\Rightarrow a // b .$$



性质定理的运用.

3. 判定定理与性质定理展示的数学思想方法

(1) 判定定理. 线线平行

线面平行

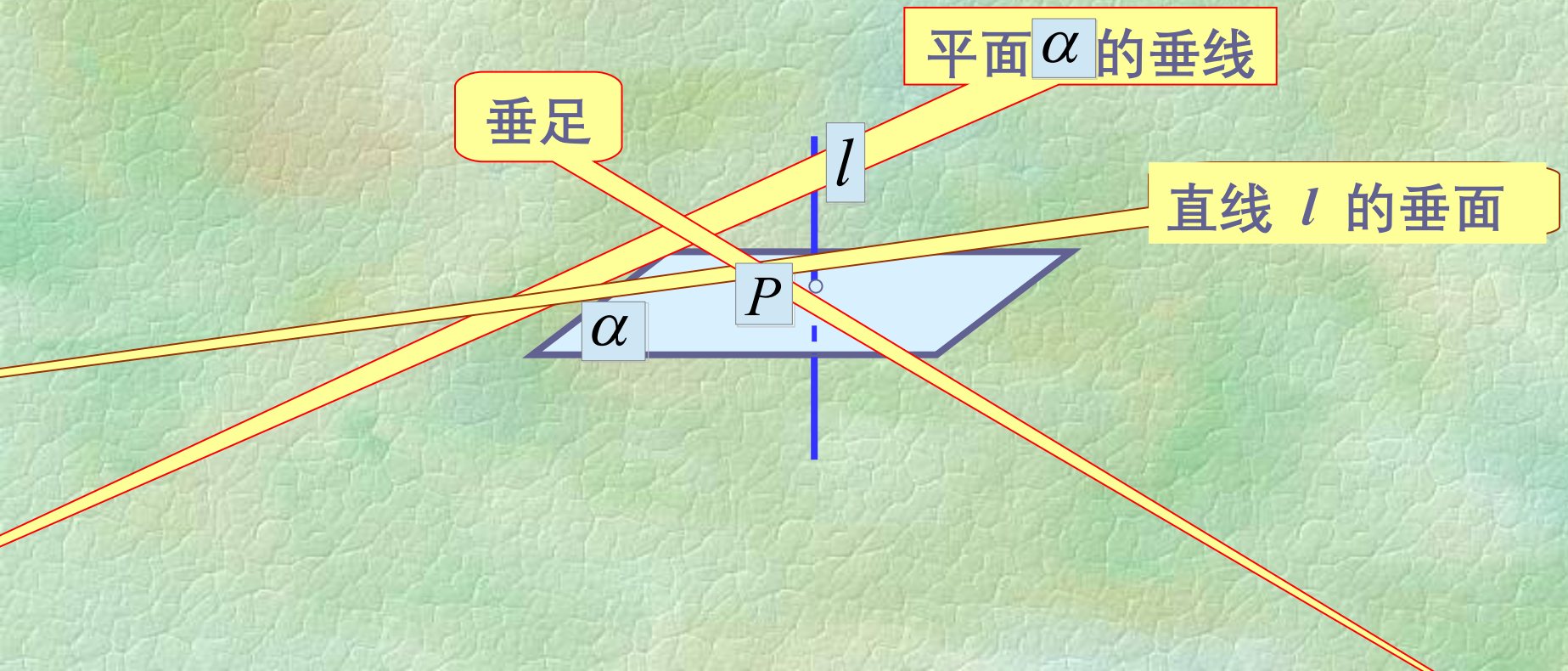
(2) 性质定理. 线面平行

线线平行

三、直线与平面垂直

直线与平面垂直的定义

如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们说直线 l 与平面 α 互相垂直记作 $l \perp \alpha$

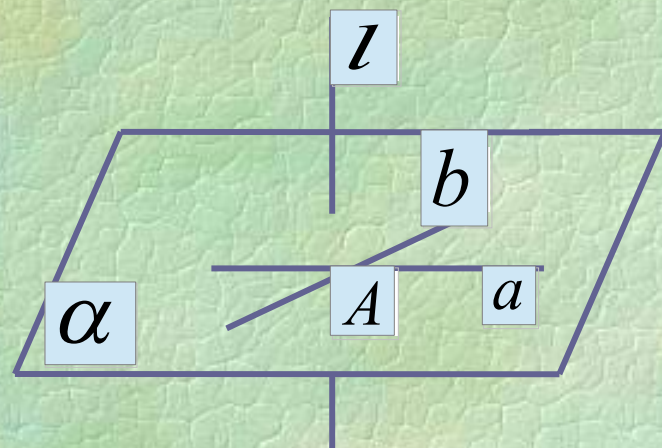


三、直线与平面垂直

2. 直线与平面垂直的判定定理

一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直。

$$\left. \begin{array}{l} l \perp a \\ l \perp b \\ a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \cap b = A \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$$



作用：

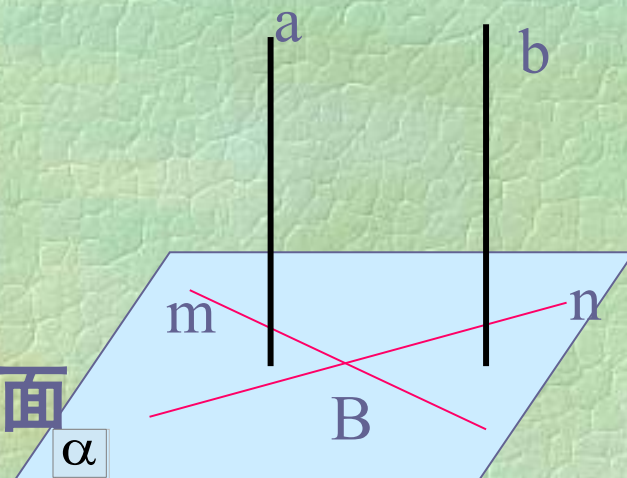
判定直线与平面垂直。

记忆：线线垂直，则线面垂直

3. 直线与平面垂直的性质定理

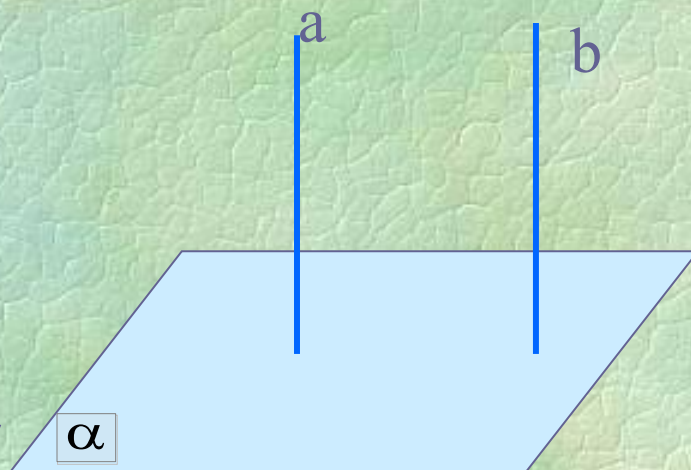
$$(1) \quad \begin{array}{l} a \perp \alpha \quad b \perp \alpha, \\ \Rightarrow a \parallel b. \end{array}$$

如果两条垂线同时垂直于同一个平面，那么这两条直线平行

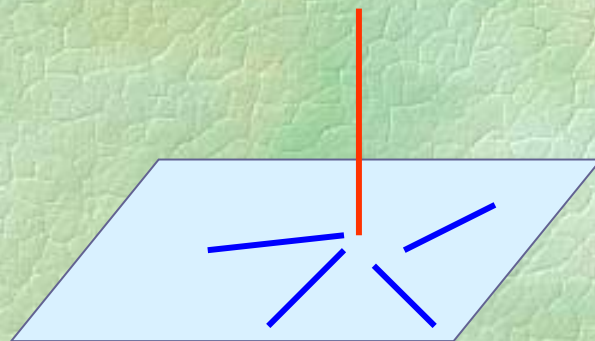


$$(2) \quad \begin{array}{l} a \parallel b, \quad a \perp \alpha, \\ \Rightarrow b \perp \alpha. \end{array}$$

两条平行直线中有一条直线垂直于一个平面，则另一条直线也垂直于这个平面。



(3) 如果一条直线垂直于一个平面，则直线与平面的任意直线都垂直

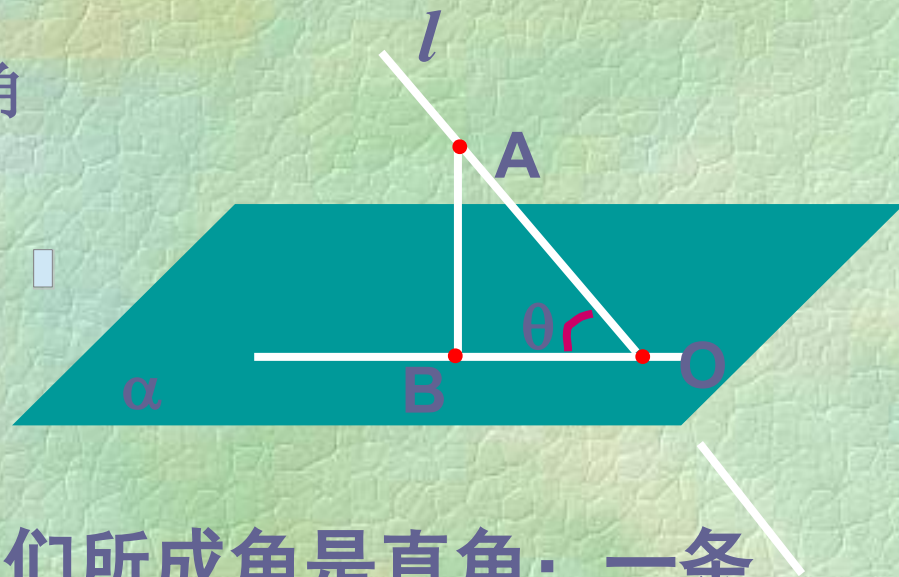


四、直线和平面所成的角

平面的一条斜线和它在这个平面内的射影所成的锐角，叫做这条斜线和这个平面所成的角。

$\angle AOB$ （记为 θ ）是 l 与 α 所成的角

$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$

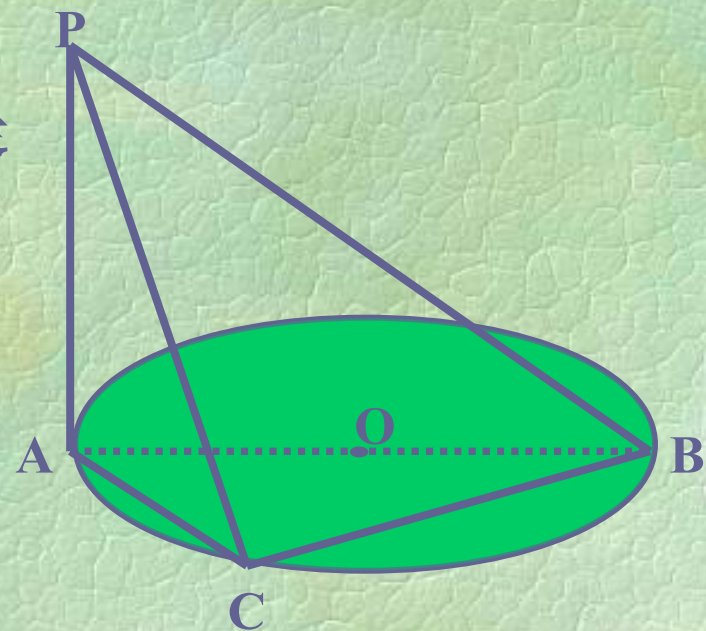


一条直线垂直于一个平面，它们所成角是直角；一条直线和一个平面平行或在平面内，它们所成角是 0° 的角。

练习 圆 O 所在一平面 α , AB 是圆 O 的直径, C 是圆周上一点, 且 $PA \perp AB$, $PA \perp AC$, 求证:

(1) $PA \perp BC$

(2) $BC \perp$ 平面 PAC



解: (1)

$\because AB \subset \alpha, AC \subset \alpha$,
 且 $AB \perp AC$ 于 A
 $PA \perp AC, PA \perp AB$
 $\therefore PA \perp \alpha$
 又 $\because BC \subset \alpha$
 $\therefore PA \perp BC$

(2)

$\because C$ 为圆 O 一点, AB 为直径
 $\therefore BC \perp AC$
 由(1)得 $BC \perp PA$
 $\therefore BC \perp$ 面 PAC

作业

P126 练习 10-5 1
- 5

谢谢观看！