

第九章 直线与圆的方程

9.4.2 圆的一般方程

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

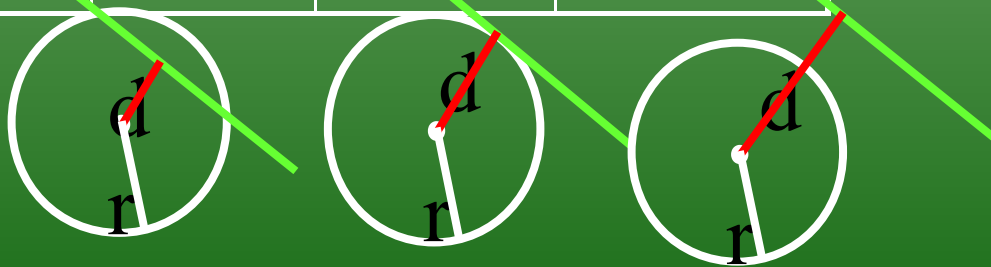
复习

1. 圆心为 $C(a, b)$ ，半径为 r 的圆的标准方程是什么？

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

2、直线与圆的位置关系：

直线和圆的位置	相交	相切	相离
公共点个数	2	1	0
圆心到直线距离 d 与半径 r 的关系	$d < r$	$d = r$	$d > r$



圆的标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 展开可得到一个什么式子？

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

令 $D = -2a$, $E = -2b$, $F = a^2 + b^2 - r^2$ 得到

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

此方程有两个特点

- (1) x^2 和 y^2 的系数相同且不等于 0 ;
- (2) 没有 xy 这样的二次项,

以上两个特点是二元二次方程

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的表示圆的必要条件, 但不是充分条件。

那么方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ① 表示圆需要什么条件呢？

配方

$$x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F$$

即

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \quad \text{②}$$

(1) 当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时，方程①表示圆

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

为圆心，

$$\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

为半径的圆。

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ①$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \quad ②$$

(2) 当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时, 方程①表示点

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right).$$

(3) 当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 时, 方程①没有实数解, 因而它不表示任何图形.

圆的一般方程定义

当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时,

方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 表示一个圆, 这个方程叫做圆的一般方程.

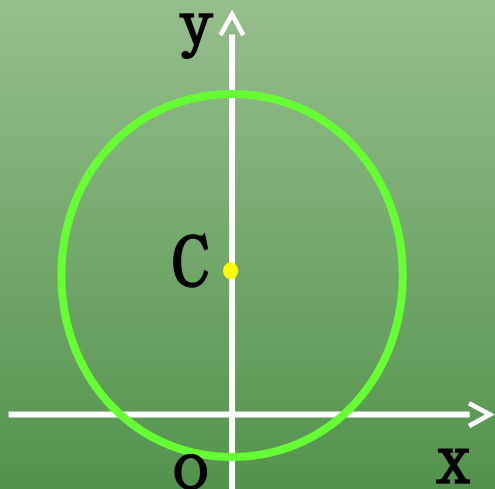
$(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ 为圆心,

$\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ 为半径的圆.

当 $D=0$, $E=0$ 或 $F=0$ 时,
圆的位置分别有什么特点?

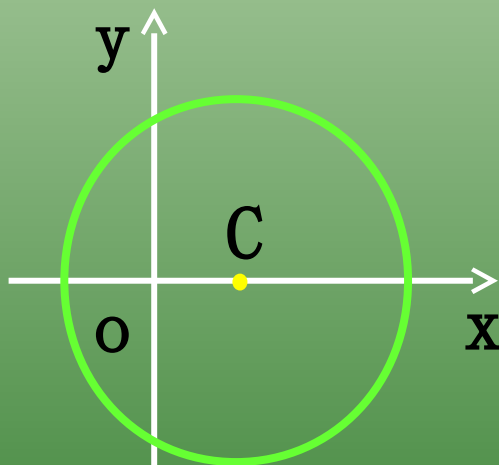
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right).$$



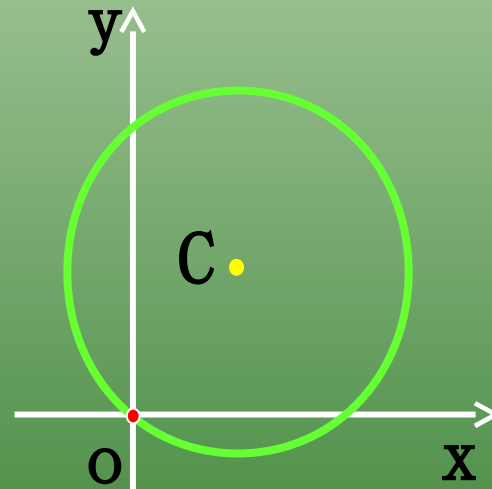
$$D=0$$

圆心在 y 轴上



$$E=0$$

圆心在 x 轴上



$$F=0$$

圆过原点

例 5 将下列圆的方程化为标准方程，并写出圆的圆心坐标和半径

(1) $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ (2) $4x^2+4y^2-8x+4y-15=0$

解 (1) 对方程左边配方， $x^2+4x+4+y^2-6y+9=12+4+9$

所以，得 $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ ，圆心坐标为 $(-2, 3)$ ，半径为 5

用公式求圆心和半径 圆心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

圆心 $(-\frac{4}{2}, -\frac{-6}{2})$ 即 $(-2, 3)$

半径 $r = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-6)^2 - 4 \times (-12)} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$

例 5 将下列圆的方程化为标准方程，并写出圆的圆心坐标和半径

(1) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ (2) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 15 = 0$

(2) 方程两边同除以 4，得 $x^2 + y^2 - 2x + \frac{15}{4} = 0$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{15}{4} + 1 + \frac{1}{4}$$

对方程左边配方，得 $(x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 5$

所以，圆心坐标为 $(1, -\frac{1}{2})$ ，半径为 $\sqrt{5}$

用公式求圆心和半径

圆心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

圆心 $(-\frac{-2}{2}, -\frac{1}{2})$ 即 $(1, -\frac{1}{2})$

半径 $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 - 4 \times (-\frac{15}{4})} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$

练习 9-9 1、2

例 6 求过三点 A (0, 5) , B (1, -2) , C (-3, -4) 的圆的方程

解: 设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

因为 A,B,C 都在圆上, 所以它们的坐标都是此方程得解, 把它们的坐标依次代入上面的方程, 得到关于 D,E,F 的三元一次方程组:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\begin{cases} 5E + F + 25 = 0 \\ D - 2E + F + 5 = 0 \\ 3D + 4E - F - 25 = 0 \end{cases}$$

解这个方程组, 得 $D=6, E=-2, F=-15$

所求圆的方程为 $x^2+y^2+6x-2y-15=0$

用待定系数法求圆方程的基本步骤:

- (1) 设圆方程 ;
- (2) 列方程组;
- (3) 求系数;
- (4) 结论 .

例 7 方程 $x^2+y^2+ax+2ay+2a^2+a-1=0$ 表示的图形是一个圆，求 a 的取值范围。

解：因为方程表示圆，所以 $D^2+E^2-4F>0$

$$\text{即 } a^2+(2a)^2-4(2a^2+a-1)>0$$

$$\text{整理得： } 3a^2+4a-4<0$$

$$\text{解不等式得： } -2<a<1.5$$

所以 a 的取值范围为 $(-2, 1.5)$

练习

若方程 $x^2+y^2+(1-m)x+1=0$ 表示圆，则 m 的取值范围是 α ()

A. $m<-1$ B. $m>3$ C. $m<-1$ 或 $m>3$ D. $m>1$

任一圆的方程可写成 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ①的形式，
但方程①表示的曲线不一定是圆。

1. 当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时表示圆

圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ ，半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

2. 当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时，方程①表示 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ 。

3. 当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 时，方程①没有实数解，
因而它不表示任何图形。

作业

P103 练习； P124 习题九 . 1-15



谢谢观看！