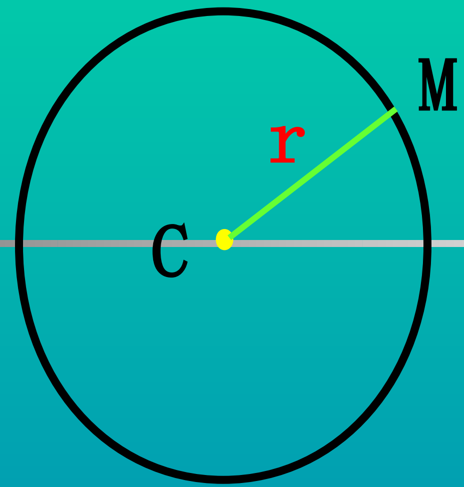
第九章　直线与圆的方程

9.4.1 圆的标准方程

授课教师：李辉
泰山护理职业学院

圆的定义

P={M||CM|=r}



平面上到一个定点的距离等于定长的点的轨迹叫做圆．

确定一个圆最基本的要素是__圆心__**和**__半径__．

根据圆的定义怎样求出圆心是 C(a, b)，半径是 r 的圆的方程？

建立直角坐标系，设 M(x， y) 为圆上任意一点

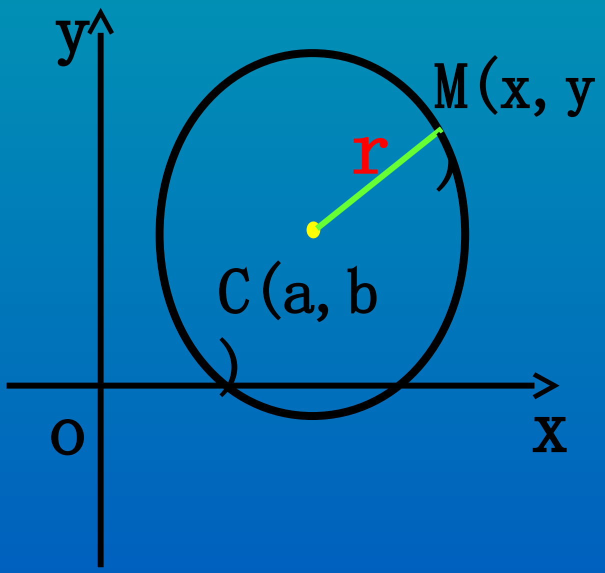
由圆的定义可得： $|CM| = r$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

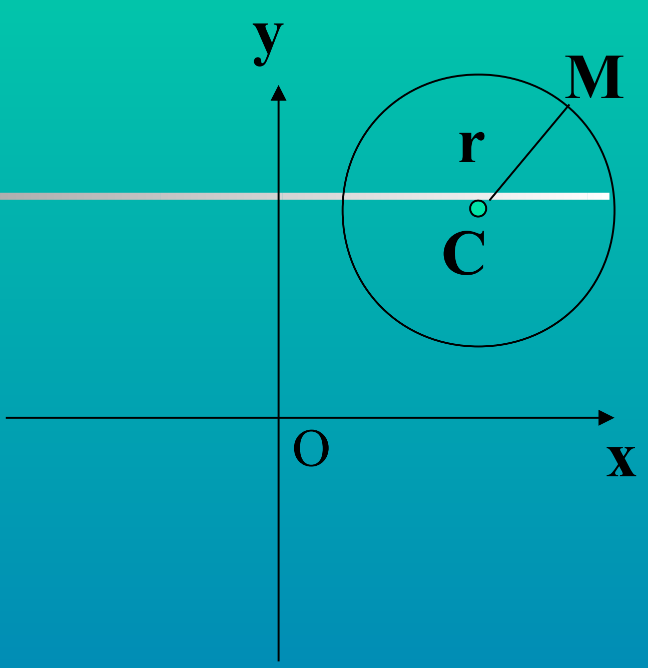
可化为：

(x-a)2+(y-b)2=

圆的标准方程



圆的标准方程特例



$(x-a)2+(y-b)2=r2$

特例：如果圆心在坐标原点，圆的方程为 $x2+y2=r2$.

练习

圆的标准方程 $\boxed{(x-a)2+(y-b)2=r2}$

说出下列圆的圆心坐标和半径

(1) $(x-3)2+(y+2)2=4$.	(3, −2)	2
(2) $(x+4)2+(y-2)2=9$.	(−4, 2)	3
(3) $x2+(y+1)2=16$.	(0, −1)	4

练 习

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

写出下列各圆的方程：

（1）圆心在点C(3，4)，半径是$\sqrt{5}$ 　　$(x-3)^2+(y-4)^2=5$

（2）圆心在原点，半径为5 　　$x^2+y^2=25$

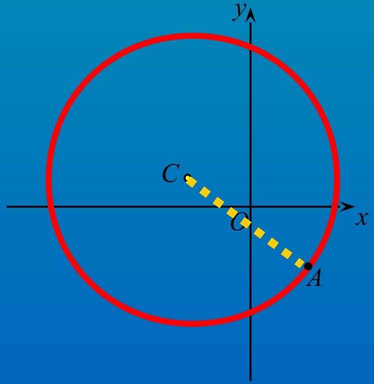
例 1　写出下列各圆的方程

（1）圆心在点 C(−2, 1)，并且过点 A(2, −2)

$$(x-a)2+(y-b)2=r2$$

解（1）所求圆的半径 $r=|CA|=\sqrt{(2+2)^2+(-2-1)^2}=5$

又因为圆的圆心坐标为（−2, 1），所以所求圆的标准方程为　（x+2)2+(y−1)2=25



例 1　写出下列各圆的方程

(2) 圆心在 C(1, 3)，并且与直线 3x−4y−6=0 相切

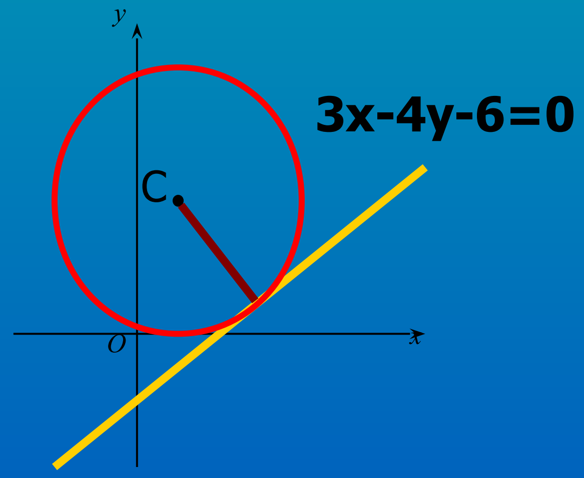
$(x-a)2+(y-b)2=r2$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

（2）因为圆 C 和直线 3x−4y−6=0 相切，所以半径 r 等于圆心 C 到这条直线的距离，根据点到直线的距离公式，

$$r=\frac{|3\times1-4\times3-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$$

因此所求圆的方程为（x−1)2+(y−3)2=9



例 1　写出下列各圆的方程

(3) 经过点 A(2, 3), B(4, 9)，并且以线段 AB 为直径

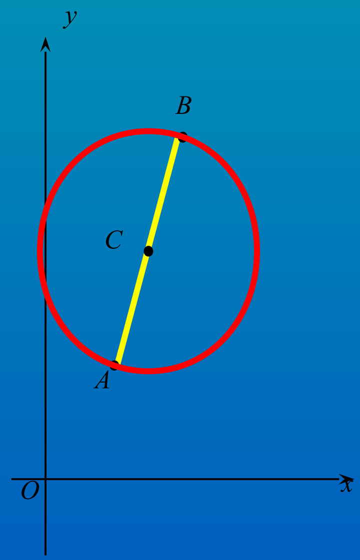
$(x-a)2+(y-b)2=r2$

中点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

(3) 设圆心 C 的坐标为（a, b），则 $a=\frac{2+4}{2}=3, b=\frac{3+9}{2}=6$

$r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(9-3)^2}=\sqrt{10}$　圆心 C（3, 6）

圆的标准方程为（x-3)2+(y-6)2=10



例 2 求过点 A(0, 1)， B（ 2, 1 ）且半径 $\sqrt{5}$ 的圆的方程

解：设圆心坐标为（a, b），则圆的方程为（x−a) 2+(y−b) 2=5

依题意得 $\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = 5 \\ (2-a)^2 + (1-b)^2 = 5 \end{cases}$

解此方程组得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

所求圆的方程为（ x−1) 2+(y+1) 2=5 或（ x−1) 2+(y−3) 2=5

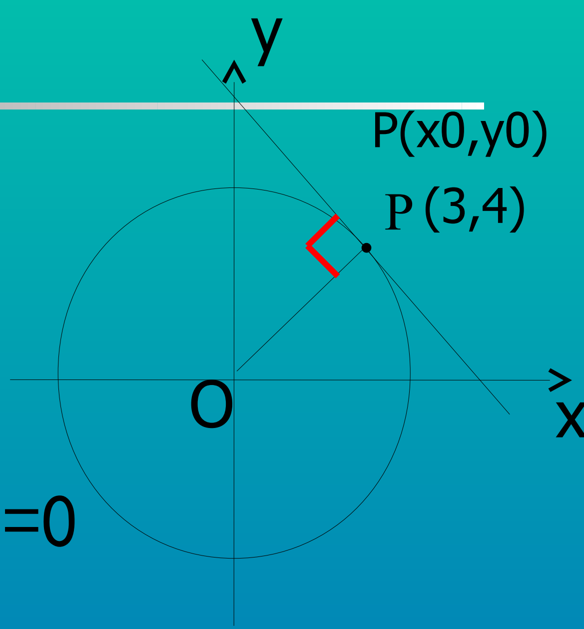
练习 9-8 3

例 3　已知圆的方程是 x2+y2=25，求经过圆上一点 P(3,4) 的切线方程 .

解:$\overrightarrow{OP}=(3,4)$ 是切线的一个法向量

由直线的点法式方程，得

3(x−3)+4(y−4)=0



所以所求切线方程为： 3x+4y−25=0

已知圆的方程是 *x2+y2=r2*，经过圆上一点 P(*x0*， *y0*) 的切线方程是什么呢？

可以推出 x0x+y0y=r2

练习：写出过圆 x2+y2=10 上一点 M（$\sqrt{2}$6，　　）的切线方程。

$2x+\sqrt{6}\,y=10$

例 4　已知圆的方程是 x2+y2=2，直线方程为 y=x+b ，当 b 为何值时，圆与直线有两个交点？只有一个交点？没有交点？

解法一　解由这两个方程组成的方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 & ① \\ y=x+b & ② \end{cases}$$

将②代入①，整理得　2x2+2bx+b2−2=0　③

方程③是一个关于 x 的二次方程，它的判别式为

△=(2b)2−4×2(b2−2)=−4b2+16=−4(b2−4)=−4(b+2)(b−2)

当 −2<b<2 时，△ >0，方程组有两个不同实数解

，

直线与圆有两个交点

当 b=−2 或 b=2 时，△ =0，方程组有两个相同实数解，

直线与圆只有一个交点

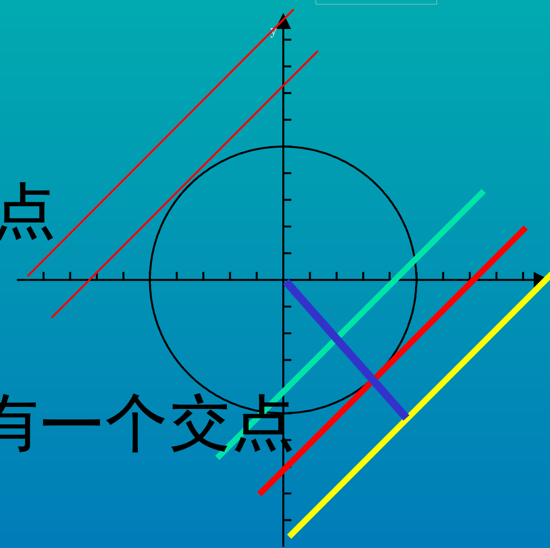
当 b<−2 或 b>2 时，△ <0，方程组没有实数解，

直线与圆没有交点

解法二　**圆与直线有两个交点、只有一个交点、无交点的问题，可以转化为圆心到直线的距离小于半径、等于半径、大于半径的问题**

$x-y+b=0$

圆心 O(0, 0) 到直线 y=x+b 的距离为 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$　圆的半径 $r=\sqrt{2}$



当 $d<r$，即 $-2<b<2$ 时，圆与直线相割，有两个交点

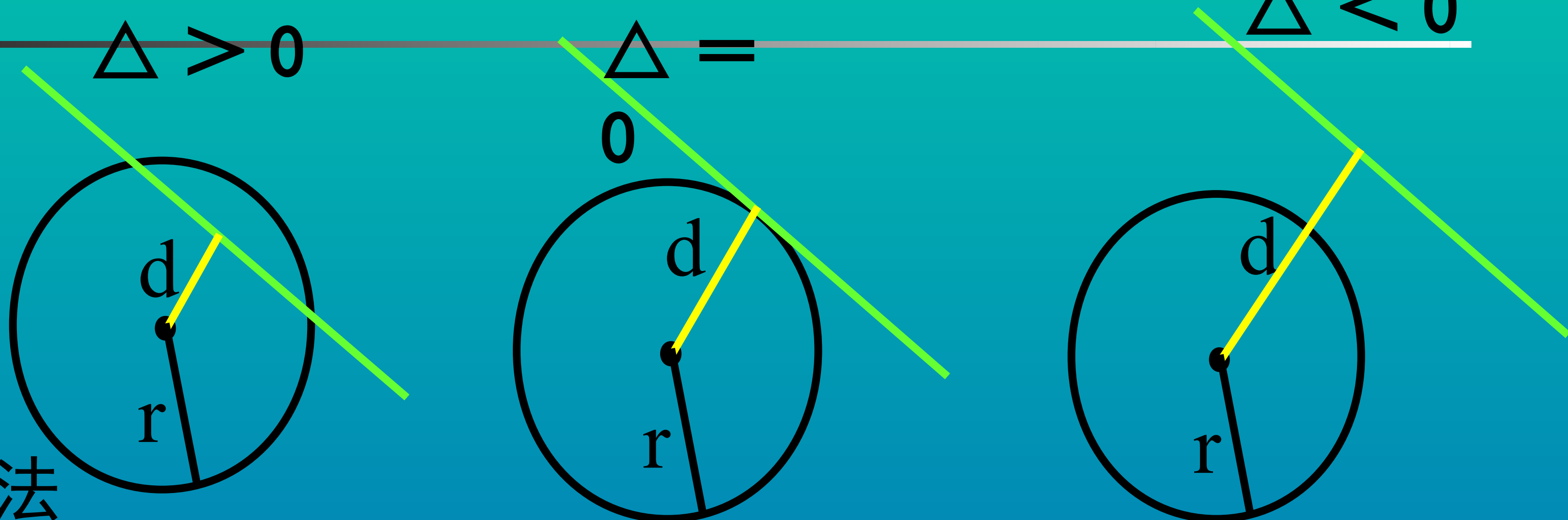
当 $d=r$，即 $b=2$ 或 $b=-2$ 时时，圆与直线相切，只有一个交点

当 $d>r$，即 $b<-2$ 或 $b>2$ 时，圆与直线相离，没有交点

直线与圆的位置关系

1. 代数法

$\Delta > 0$　　$\Delta = 0$　　$\Delta < 0$



2. 几何法

$d<r$	$d=r$	$d>r$
两个公共点	一个公共点	没有公共点
相交	相切	相离

小结

1. 圆的标准方程

$$\boxed{(x-a)2+(y-b)2=r2}\ (r>0)$$

圆心 C(a,b)

圆的半径 r

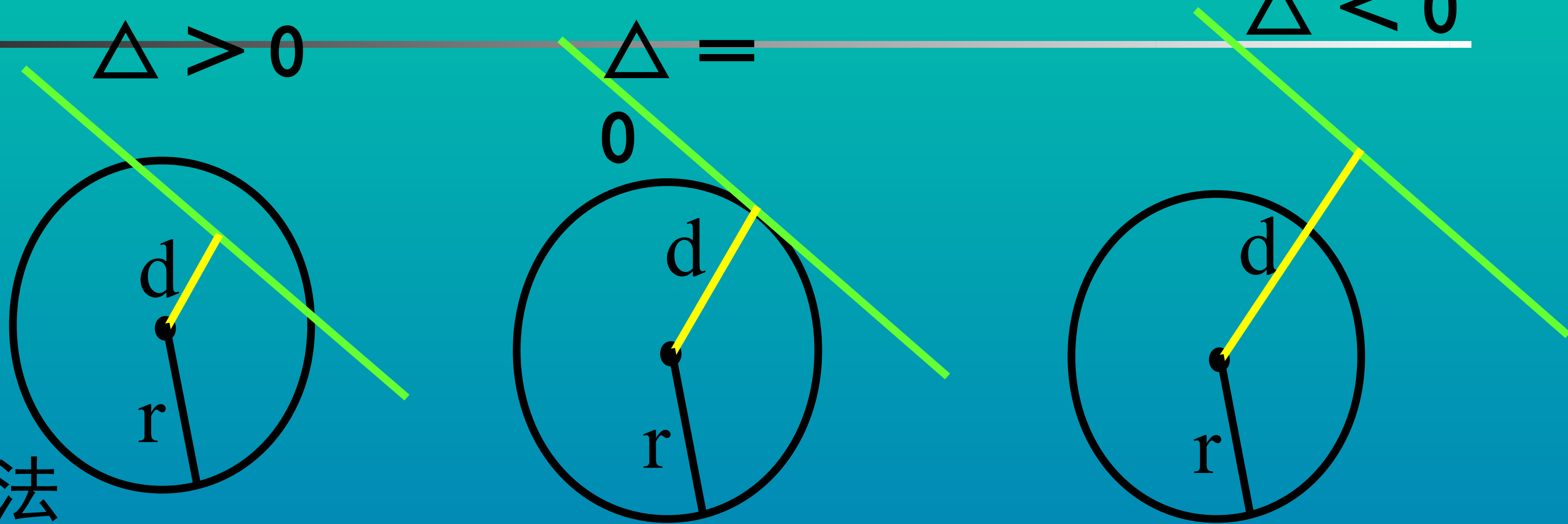
特殊情况：圆心在原点时， a=b=0 ，

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

直线与圆的位置关系

1. 代数法

△ > 0　　△ = 0　　△ < 0

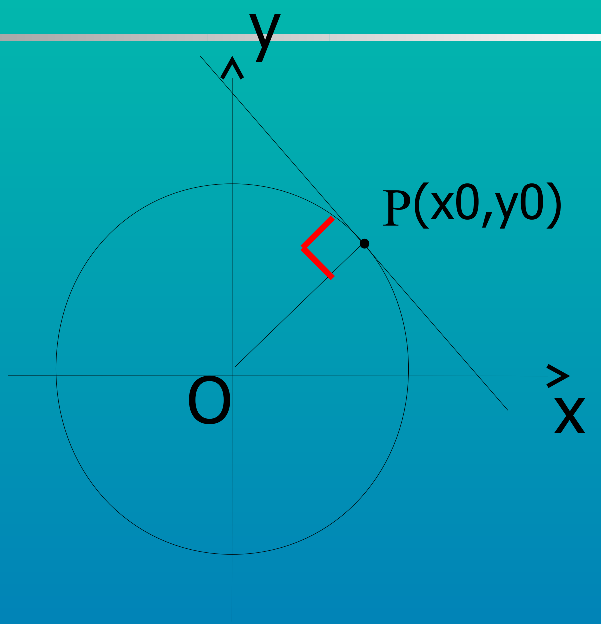


2. 几何法

相交	相切	相离
$d<r$	$d=r$	$d>r$
两个公共点	一个公共点	没有公共点

3. 已知圆的方程是 *x2+y2=r2*，经过圆上一点 P(*X0*，*y0*) 的切线方程是

x0x+y0y=r2



作业

P101　练习　1-6

谢谢观看！