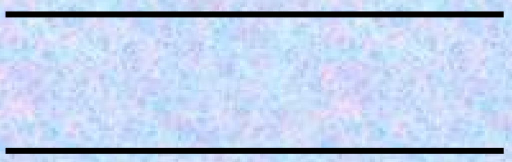
§9.2　两条直线的位置关系

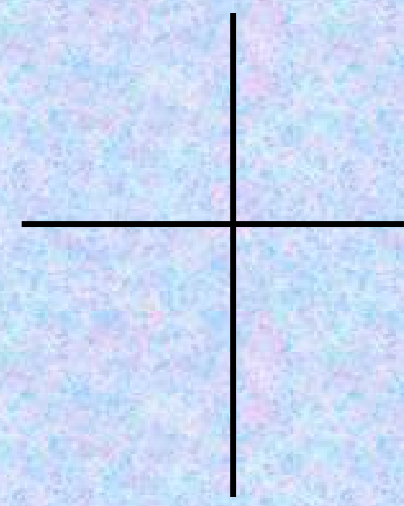
1. 平行



2. 重合

3. 相交

4. 垂直

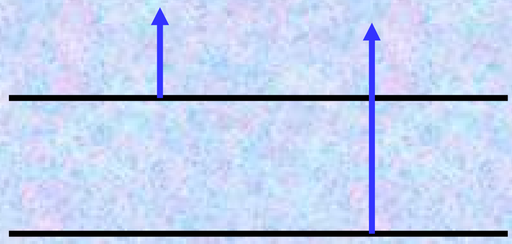


复习

直线方程归纳

名　称	已知条件	标准方程	适用范围
点向式	点 $P(x_0,y_0)$ 和方向向量 (v_1,v_2)	$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}$	不垂直于 x、y 轴的直线
点法式	点 $P(x_0,y_0)$ 和法向量 (A,B)	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	任意直线
点斜式	点 $P(x_0,y_0)$ 和斜率 k	$y-y_0=k(x-x_0)$	不垂直于 x 轴的直线
斜截式	斜率 k 和在 y 轴上的截距 b	$y=kx+b$	不垂直于 x 轴的直线
一般式	两个独立的条件	$Ax+By+C=0$	A，B 不全为0

9.2.1 两条直线平行



设两条直线分别为

: $A1x + B1y + C1 = 0$ ， $\vec{n_1} = (A1, B1)$

: $A2x + B2y + C2 = 0$ ， $\vec{n_2} = (A2, B2)$

$l1 \parallel l2 \Leftrightarrow$ 存在一个非零实数λ，使 $\vec{n_1} = \lambda \vec{n_2}$，且 $C1 \neq \lambda C2$

如果 $l1$ 与 $l2$ 的方程中得 x 和 y 的系数及常数项都不为零，则有

$$l1 \parallel l2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

例 1 已知直线 $l1$: 2x−4y+7=0, $l2$: x−2y+5=0，求证：$l1$//$l2$

证明：显然，直线 $l1$ 的一个法向量可取为 $\overrightarrow{n_1}$ =（2，−4），

$l2$ 的一个法向量可取为 $\overrightarrow{n_2}$ =(1, −2)

因为 $\overrightarrow{n_1}=2\overrightarrow{n_2}$ 且 $7\neq2\times5$

所以 $l1$//$l2$

另证

因为 $\frac{2}{1}=\frac{-4}{-2}\neq\frac{7}{5}$

所以 $l1$//$l2$

练习 9-5 1

2 求证直线 $l1$:Ax+By+C1=0 与直线 $l2$:Ax+By+C2=0(C1≠C2) 平行

证明：直线 $l1$ 的一个法向量可取为 $\vec{n_1}$ = （A,B),

$l2$ 的一个法向量可取为 $\vec{n_2}$ = （A,B)

显然 $\vec{n_1}=\vec{n_2}$ 且 C1≠C2

所以 $l1//l2$

结论

一般地，与直线 Ax+By+C=0 平行的直线都可以表示成 Ax+By+D=0 (D≠C)

例 3 求过点（1，-4），且与直线 2x+3y+5=0 平行的直线方程

解：设所求直线方程为 2x+3y+D=0，由于所求直线过点（1，-4），将其代入方程，得 D=10

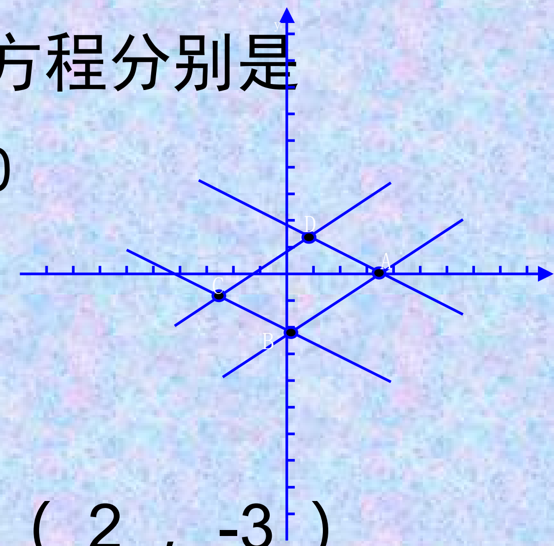
因此，所求直线方程为 2x+3y+10=0

练习 9-5 2

例 4　已知四边形 ABCD 的四条边所在的直线方程分别是

AB： 2x−3y−7=0　　BC: 3x+6y−11=0

CD： 4x−6y+5=0　　DA： x+2y−4=0



求证四边形 ABCD 是平行四边形

证明：因为直线 AB 的一个法向量可取为 $\overrightarrow{n_{AB}}$ =（2，-3）

直线 CD 的一个法向量可取为 $\overrightarrow{n_{CD}}$ =（4，−6）

显然 $\overrightarrow{n_{AB}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{n_{CD}}$ 且 $-7\neq\frac{1}{2}\times 5$　所以 AB//CD

又直线 BC 的一个法向量可取为 $\overrightarrow{n_{BC}}$ =（3, 6）

直线 DA 的一个法向量可取为 $\overrightarrow{n_{DA}}$ =（1, 2）

因为 $\overrightarrow{n_{BC}}=3\overrightarrow{n_{DA}}$ ，且 −11≠3×(−4)，所以 BC//DA

因此四边形 ABCD 是平行四边形

另证 $\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}\neq\frac{-7}{5}$ 所以 AB//CD　$\frac{3}{1}=\frac{6}{2}\neq\frac{-11}{-4}$ 所以 BC//DA

9.2.2　两条直线的交点与垂直

设两条直线分别为

$L1：A1x+B1y+C1=0$，$\vec{n_1}=(A1，B1)$

$L2：A2x+B2y+C2=0$，$\vec{n_2}=(A2，B2)$

$L1$ 与 $L2$ 相交 $\Leftrightarrow A1B2-A2B1\neq 0$

当 A2≠0 且 B2≠0 时 $L1$ 与 $L2$ 相交 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$

求直线 L1 与 L2 的交点，就是要解由这两个方程组成的方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

这个方程组的解就是两条直线的交点坐标

例 5 已知两条直线的方程 L1:2x-y-5=0 ，L2:x-3y-10=0，判断这两条直线是否相交？如果相交，求出交点坐标

解：显然，直线 L1 的一个法向量可取为 $\overrightarrow{n_1}$ =（2， -1）

，L2 的一个法向量可取为 $\overrightarrow{n_2}$ =（1， -3）

因为 2×（-3）≠（-1）×1，所以直线 L1 与 L2 相交

程组 $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x-3y-10=0 \end{cases}$ 得 x=1， y=-3

练习 9-6 1

所以直线 L1 与 L2 的交点坐标为（1， -3）

例 6 求过直线 x-y-1=0 和 x+y-3=0 的交点，且与 2x-y=0 平行的直线方程

解：解方程组 $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ 得 x=2, y=1， 所求直线过点（2, 1）

设所求直线的方程为 2*x*-*y* ＋ *D* ＝ 0，因为该直线过点（2, 1），将其代入方程，得 D=-3

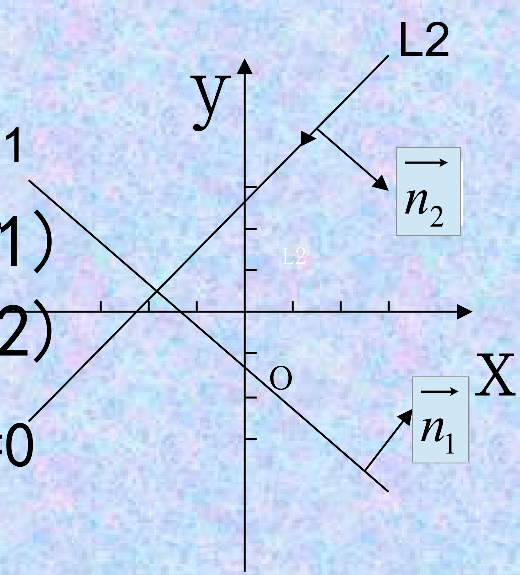
所求直线 *L* 的方程为 2x-y-3=0

两条直线的垂直

设两条直线分别为

: $A1x + B1y + C1 = 0$ $\vec{n_1} = (A1, B1)$

2: $A2x + B2y + C2 = 0$, $\vec{n_2} = (A2, B2)$



$L1 \perp L2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \Leftrightarrow$ A1A2+B1B2=0

$L1 \perp L2 \Leftrightarrow$ A1A2+B1B2=0

例 7　判断下列各对直线是否垂直

（1） 2x−4y−7=0 与 2x+y−5=0　　　(2) 2x=7 与 3y−5=0

解 (1) 因为法向量分别可取为 $\vec{n_1}$=（2，−4）$\vec{n_2}$ =（2, 1）

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}$ 2×2+（— 4）×1=0 所以这两条直线垂直

(2) 因为法向量分别可取为 $\vec{n_1}$（2， 0）,$\vec{n_2}$ =（0, 3）

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}$ =2×0+0×3=0　所以这两条直线垂直

练习 9-6 2

例 8　求证直线 Ax+By+C1=0 与 Bx-Ay+C2=0 垂直

证明：因为法向量分别可取为 $\overrightarrow{n_1}$ （A, B) ），$\overrightarrow{n_2}$ = （B, -A ）

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}$=AB+B(-A)=0　　所以这两条直线垂直

一般地，与直线 Ax+By+C=0 垂直的直线都可表示为 Bx-Ay+D=0

例 9　求过点（1, 2 ），且与直线 2x+y-10=0 垂直的直线方程

解：设所求直线为 x-2y+D=0, 因为直线过点（1, 2 ），

将其代入方程，得　1-2×2+D=0

解这个方程，得　D=3

所以，所求直线方程为　x-2y+3=0

练习 9-6　3 、4 、5 、6

小结

两直线的位置关系

若直线 *l1:***A1x+B1y+C1=0 ，直线** *l2:***A2x+B2y+C2=0**

当 **A1， A2， B1， B2** 全不为 **0** 时

1、$l_1 // l_2$ � $\frac{A_1}{A_2}$ $\frac{B_1}{B_2}$ $\frac{C_1}{C_2}$

2、l_1、l_2 重合 � $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ $\frac{C_1}{C_2}$

3、l_1、l_2 相交 鄙 $\frac{A_1}{A_2}$ $\frac{B_1}{B_2}$

4、*l1* ⊥ *l2* **A1A2+B1B2=0**

小结

若直线斜率均存在

且 $b_1 \neq b_2$

2、垂直 $k_1 \cdot k_2 = -1$

常用重要结论

1、与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线方程：

$Ax+By+D=0$ （ $C \neq D$ ）

2、与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线方程： $Bx-Ay+D=0$

作业