

分部积分公式

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

提出问题

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

换元积分法
(或凑微分法)

$$\int x e^x dx \quad ?$$

类似的： $\begin{cases} \int x \sin x dx \\ \int e^x \sin x dx \end{cases}$ 如何解决



分部积分公式

下面利用两个函数乘积的求导法则，得出求积分的基本方法——分部积分法。

设函数 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$ 具有连续导数，

$$(uv)' = u'v + uv',$$

$$\text{移项} \Rightarrow uv' = (uv)' - u'v,$$

对此等式两边求不定积分

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx,$$

即

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

分部积分公式

分部积分公式

$$\int uv' dx = u \cdot v - \int vu' dx$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

分部积分公式

利用以上公式进行不定积分的方法叫**分部积分法**

例 1 求积分 $\int x \cos x dx$.

解：令 $u = x$, $v = \cos x$, $\cos x dx = d \sin x = dv$ $v = \sin x$

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

若令 $u = \cos x$, $v = x$, 则 $v = \frac{1}{2} x^2$, $x dx = \frac{1}{2} dx^2 = dv$

$$\int x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx$$

显然 u, v' 选择不当, 积分更难进行。

对比分析

若 u 和 dv 选取不当，就求不出结果，所以应用分部积分法时，恰当选取 u 和 dv 是一个关键。

选取 u 和 dv 一般要考虑下面两点：

(1) v 要容易求得； $\int uv' dx = u \cdot v - \int vu' dx$

(2) $\int v du$ 要比 $\int u dv$ 容易积出 $\int u dv = u \cdot v - \int v du$

例 2 求积分 $\int x \ln x dx.$

解 $u = \ln x,$ $dv = x dx = d \frac{x^2}{2},$ $v = \frac{x^2}{2}$

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} \int \ln x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

思考：如何求 $\int x^n \ln x dx$

若被积函数是幂函数和对数函数的乘积，
就考虑设对数函数为 u 。

例3 求积分 $\int x^2 e^x dx$.

解 $u = x^2$, $v = e^x$, 则 $v = e^x$, $e^x dx = de^x = dv$,

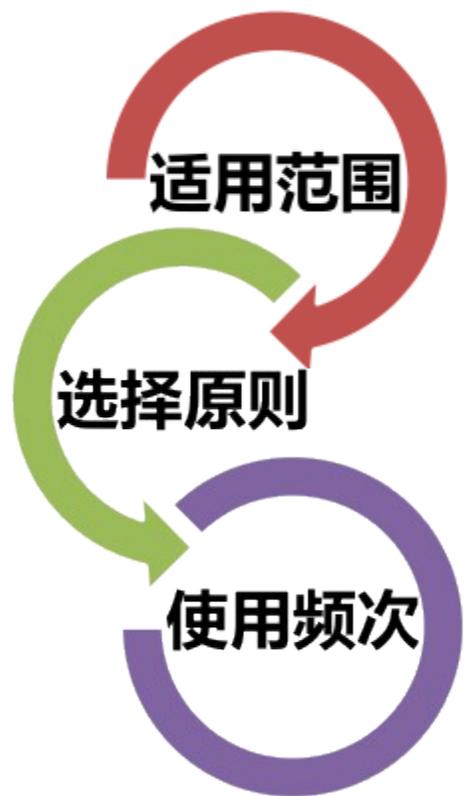
$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

(再次使用分部积分法) $u = x$, $v = e^x$, 则 $v = e^x$, $e^x dx = dv$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$$

总结 若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积, 就考虑设幂函数为 u , 使其降幂一次(假定幂指数是正整数)

分部积分公式



两个函数乘积的不定积分问题

v 易求, $\int v du$ 比 $\int u dv$ 易求

多次使用, 每次 v 的选择保持一致



谢谢观看！

