分部积分公式

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

提出问题

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

换元积分法

（或凑微分法）

$$\int xe^{x}\mathrm{d}x \qquad ?$$

类似的：$\begin{cases}\int x\sin x\mathrm{d}x \\ \int e^{x}\sin x\mathrm{d}x\end{cases}$ 如何解决

分部积分公式

下面利用两个函数乘积的求导法则，得出求积分的基本方法——分部积分法。

设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$具有连续导数,

$$(uv)'=u'v+uv',$$

移项 $\Rightarrow uv'=(uv)'-u'v,$

对此等式两边求不定积分

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx,$$

即 $$\boxed{\int udv=uv-\int vdu.}$$

分部积分公式

分部积分公式

$$\int uv'\mathrm{d}x = u\cdot v - \int vu'\mathrm{d}x$$

$$\int u\,\mathrm{d}v = u\cdot v - \int v\,\mathrm{d}u$$

分部积分公式

利用以上公式进行不定积分的方法叫分部积分法

例 1　求积分 $\int x\cos x dx$.

解：令 $u = x$, $v' = \cos x$, $\cos x dx = d\sin x = dv$　$v = \sin x$

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

若令 $u = \cos x$, $v' = x$, 则 $v = \frac{1}{2}x^2$, $xdx = \frac{1}{2}dx^2 = dv$

$$\int x\cos x dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin x dx$$

显然，u, v' 选择不当，积分更难进行。

对比分析

若 u 和 dv 选取不当，就求不出结果，所以应用分部积分法时，恰当选取 u 和 dv 是一个关键。

选取 u 和 dv 一般要考虑下面两点：

(1) v 要容易求得； $\int uv'\mathrm{d}x = u\cdot v - \int vu'\mathrm{d}x$

(2) $\int v du$ 要比 $\int u dv$ 容易积出 $\int u\,\mathrm{d}v = u\cdot v - \int v\,\mathrm{d}u$

例 2　求积分 $\int x\ln x dx.$

解　$u=\ln x,$ 　$dv = xdx = d\frac{x^2}{2},$ 　$v=\frac{x^2}{2}$

$$\int x\ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x dx^2 = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

思考：如何求 $\int x^n \ln x\, dx$

若被积函数是幂函数和对数函数的乘积，就考虑设对数函数为 u 。

例 3　求积分 $\int x^2e^x dx.$

解　$u=x^2,$　$v'=e^x,$ 则 $v=e^x,$　$e^x dx=de^x=dv,$

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

（再次使用分部积分法）$u=x,$ $v'=e^x,$ 则 $v=e^x,$　$e^x dx=dv$

$$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$$

总结　若被积函数是幂函数和正（余）弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u，使其降幂一次（假定幂指数是正整数）

课堂小结

分部积分公式

适用范围	两个函数乘积的不定积分问题
选择原则	V易求，$\int v du$ 比 $\int u dv$ 易求
使用频次	多次使用，每次V的选择保持一致

谢谢观**看**！