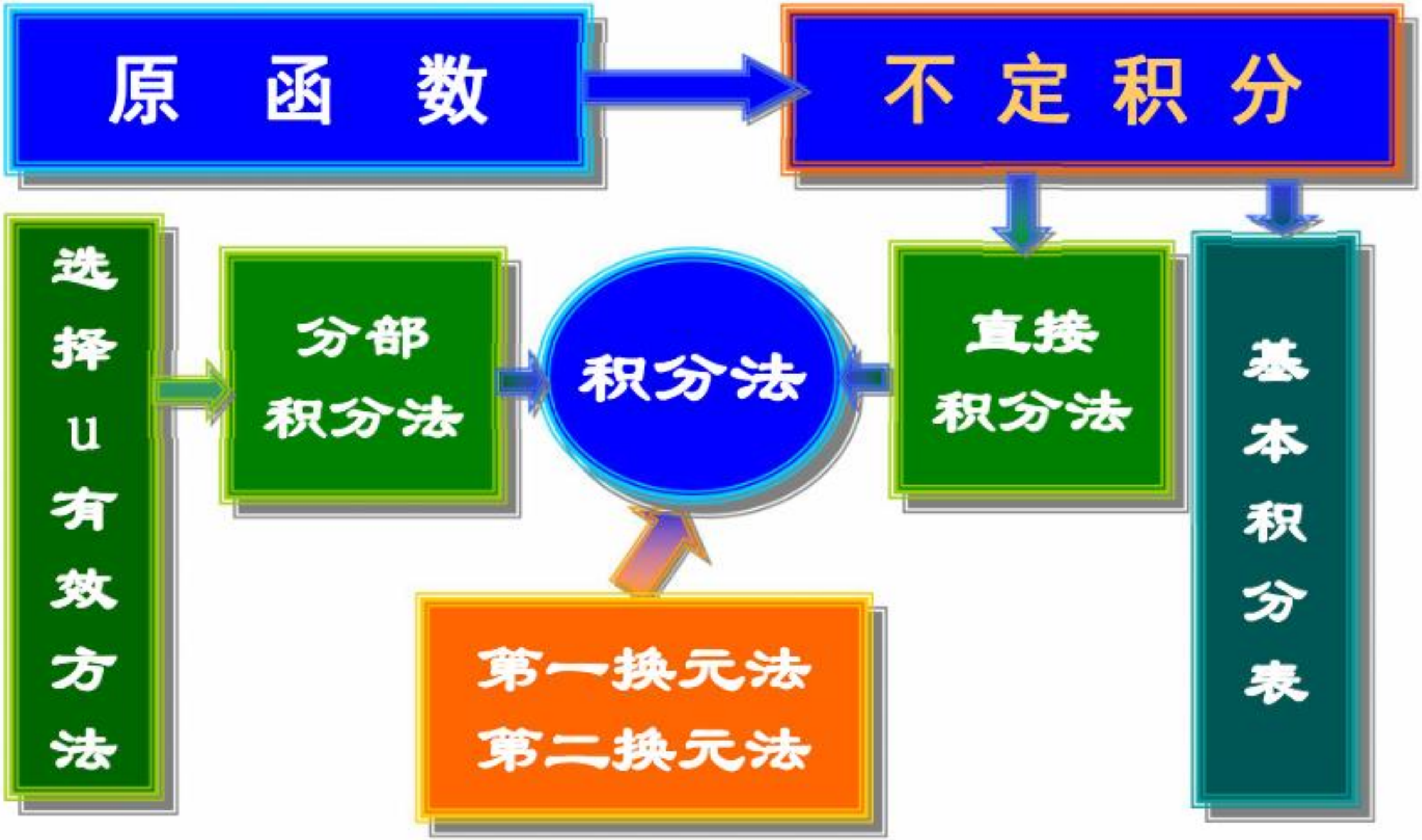
不定积分

一、主要内容



二 不定积分定义及基本公式

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

1.微分运算与求不定积分的运算是互逆的.

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x) \qquad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \qquad \int dF(x) = F(x) + C$$

2、基本积分表

(1) $\int k dx = kx + C \quad (k\text{是常数})$

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(12) $\int e^x dx = e^x + C$

(13) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(14) $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$

(15) $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$

(16) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(17) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(18) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

(19) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(20) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

(21) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

(22) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$

$= \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

三 不定积分计算

1、化为代数和的积分

例1 求积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

解 原式$=\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$

$$=\int (1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$=x-\arctan x+c.$$

例2 求积分 $\int 2^x e^x dx.$

解 原式 $=\int (2e)^x dx$

$$=\frac{(2e)^x}{\ln 2e}+c$$

$$=\frac{2^x e^x}{1+\ln 2}+c.$$

例3 求积分 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$

解 原式 $= \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx$

$$= \frac{1}{2}(x-\sin x)+c.$$

2、第一类换元法

定理 1　设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，

则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = [\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$$

第一类换元公式（凑微分法）

常见类型:

$(1).\ f(x^{n+1})x^n dx;$

$(2).\ \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx;$

$(3).\ \dfrac{f(\ln x)}{x}dx;$

$(4).\ \dfrac{f(\frac{1}{x})}{x^2}dx;$

$(5).\ f(\sin x)\cos x dx;$

$(6).\ f(a^x)a^x dx;$

$(7).\ f(\tan x)\sec^2 x dx;$

$(8).\ \dfrac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx;$

例4 求 $\int \frac{1}{3+2x}dx.$

$$\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c}$$

解 $\int \frac{1}{3+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}(3+2x)'dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}d(3+2x)$

凑 微 分

$= \frac{1}{2}\ln|3+2x| + C.$

例5　求$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$.

解　$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx = \int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x)$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+2\ln x\right| + C.$$

例6　求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

解　原式 $= \int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}$

$$= \arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$$

3、第二类换元法

定理 2　设$x=\psi(t)$是单调的、可导的函数，并且$\psi'(t)\neq 0$，又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)dx=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$$

第二类换元公式

其中$\overline{\psi}(x)$是$x=\psi(t)$的反函数.

(1).三角函数代换

如$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$，令$x=a\sin t$.

(2).倒置代换　　令$x=\dfrac{1}{t}$.

(3).简单无理函数代换

如$f(x)=\sqrt[n]{ax+b}$，令$t=\sqrt[n]{ax+b}$.

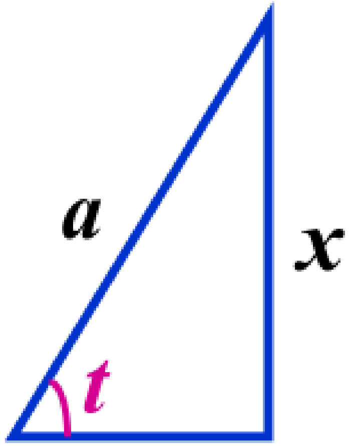
例7 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \left(a > 0\right).$

解法一 第一类换元法

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} d\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

例7 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx(a>0).$



解法二 第二类换元法

令$x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \int \frac{1}{a\cos t} \cdot a\cos t dt$$

$$= \int dt = t + c$$

$$= \arcsin\frac{x}{a} + c$$

例8 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx.$

解 令 $t = \sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x = t^2 - 1,$

$$x = \ln(t^2 - 1), \quad dx = \frac{2t}{t^2-1} dt,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx = \int \frac{2}{t^2-1} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= \ln\left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = 2\ln\left(\sqrt{1+e^x} - 1\right) - x + C.$$

例9 求$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}dx$

解 令$\sqrt{2x}=t$，即$x=\frac{t^2}{2}$，$dx=tdt$

原式 $=\int \frac{t}{1+t}dt=\int (1-\frac{1}{1+t})dt$

$$=t-\ln(1+t)+C=\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$$

例10　求 $\dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$

解　令$x=\dfrac{1}{t}$，$dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$

$$原式=\int\frac{1+\ln t}{(1+t\ln t)^2}dt$$

$$=\int\frac{d(1+t\ln t)}{(1+t\ln t)^2}=-\frac{1}{1+t\ln t}+C$$

$$=\frac{x}{x-\ln x}+C$$

4、分部积分法

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$ 分部积分公式

选择u的有效方法：LIATE选择法

L----对数函数； **I**----反三角函数；

A----代数函数； **T**----三角函数；

E----指数函数； 哪个在前哪个选作**u.**

例11 求积分$\int \arcsin x dx$.

解 原式$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

例12 求积分 $\int x^3 \ln x dx$.

解 $u = \ln x$, $\quad x^3 dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right) = dv$,

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

例13 求积分$\int e^{\sqrt{x}}dx$

解 令$\sqrt{x}=t$，$dx=2tdt$

$$原式=2\int te^{t}dt=2(te^{t}-\int e^{t}dt)$$

$$=2(te^{t}-e^{t})+C$$

$$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

例14 已知$f(x)$的一个原函数为$\dfrac{\sin x}{x}$，求$\int xf'(x)dx$

解 $$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$$

$$= xf(x) - \frac{\sin x}{x} + C$$

又 $$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

$$\int xf'(x)dx = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C$$