

导数与微分

一、内容概述

关系 $\frac{dy}{dx} = y' \Leftrightarrow dy = y'dx \Leftrightarrow \Delta y = dy + o(\Delta x)$

导数

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

基本公式

高阶导数

微分

$$dy = y'\Delta x$$

求导法则

二、导数计算

1、基本导数公式

$$(C)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2、求导法则

(1) 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 可导, 则

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v', \quad (2) (cu)' = cu' (c \text{ 是常数}),$$

$$(3) (uv)' = u'v + uv', \quad (4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0).$$

例1 求 $y = x^3 - 2x^2 + \sin x$ 的导数.

解 $y' = 3x^2 - 4x + \cos x.$

例2 求 $y = \sin 2x \cdot \ln x$ 的导数 .

解 $\because y = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \ln x$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cos x \cdot \cos x \cdot \ln x + 2 \sin x \cdot (-\sin x) \cdot \ln x \\ &\quad + 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2 \cos 2x \ln x + \frac{1}{x} \sin 2x. \end{aligned}$$

(2) 复合函数的求导法则

设 $y = f(u)$, 而 $u = \varphi(x)$ 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

例3 求函数 $y = (2x + 4)^4$ 的导数.

解 $\because y = u^4, u = 2x + 4.$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 4u^3 \cdot 2$$

$$= 4(2x + 4)^3 \cdot 2$$

$$= 8(2x + 4)^3.$$

例4 求函数 $y = \ln \sin x$ 的导数.

解 $\because y = \ln u, u = \sin x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u} \cdot \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

例5 求函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的导数 .

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

(3) 高阶导数

二阶导数 $(f'(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x},$

记作 $f''(x), y'', \frac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \frac{d^3 y}{dx^3}.$

一般地, 函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数, 记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

例6 设 $y = \arctan x$, 求 $f''(0), f'''(0)$.

解 $y' = \frac{1}{1+x^2} \quad y'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$\therefore f''(0) = \left. \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \right|_{x=0} = 0;$$

$$y''' = \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$\therefore f'''(0) = \left. \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \right|_{x=0} = -2.$$

例7 $y = f(\ln x^2)$, $f(x)$ 可导, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解
$$\frac{dy}{dx} = f'(\ln x^2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} f'(\ln x^2).$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{2}{x^2} f'(\ln x^2) + \frac{2}{x} (f'(\ln x^2))' \\ &= -\frac{2}{x^2} f'(\ln x^2) + \frac{2}{x} \cdot f''(\ln x^2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x \\ &= -\frac{2}{x^2} f'(\ln x^2) + \frac{4}{x^2} f''(\ln x^2).\end{aligned}$$

(4) 隐函数求导法则

例8 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$, 求 y'' 在点 $(0,1)$ 处的值.

解 方程两边对 x 求导得

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3 y' = 0 \quad (1)$$

代入 $x=0, y=1$ 得 $y' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \frac{1}{4};$

将方程(1)两边再对 x 求导得

$$12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2 (y')^2 + 4y^3 y'' = 0$$

代入 $x=0, y=1, y' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \frac{1}{4}$ 得 $y'' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -\frac{1}{16}.$

(5) 对数求导法

例9 设 $y = x^{\sin x}$ ($x > 0$), 求 y' .

解 等式两边取对数得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

上式两边对 x 求导得

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} y' &= \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \\ \therefore y' &= y \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)\end{aligned}$$

三、微分计算

基本初等函数的微分公式

$$d(C) = 0$$

$$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx$$

$$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$$

$$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx$$

$$d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

微分的基本法则

函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + u dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

微分形式的不变性

无论 x 是自变量还是中间变量,函数 $y = f(x)$

的微分形式总是 $dy = f'(x)dx$

微分的计算:先求导数再求微分、
利用形式不变性求微分.

例10 设 $y = \ln(x + e^{x^2})$, 求 dy .

解 $\because y' = \frac{1 + 2xe^{x^2}}{x + e^{x^2}},$

$$\therefore dy = \frac{1 + 2xe^{x^2}}{x + e^{x^2}} dx.$$

例11 设 $y = \sin(2x + 1)$, 求 dy .

解 $\because y = \sin u, u = 2x + 1.$

$$\therefore dy = \cos u du$$

$$= \cos(2x + 1) d(2x + 1)$$

$$= \cos(2x + 1) \cdot 2dx$$

$$= 2 \cos(2x + 1) dx.$$

导数与微分的关系

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $A = f'(x_0)$.