.《导数及其应用》知识点总结

一、导数的概念和几何意义

1. 函数的平均变化率：函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的平均变化率为：$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$。

2. 导数的定义：设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义，$x_0\in(a,b)$，若 Δx 无限趋近于 0 时，比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近于一个常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，并称该常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$。函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的实质是在该点的瞬时变化率。

3. 求函数导数的基本步骤：（1）求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；（2）求平均变化率：$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；（3）取极限，当 Δx 无限趋近与 0 时，$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近与一个常数 A，则 $f'(x_0)=A$.

4. 导数的几何意义：

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率。由此，可以利用导数求曲线的切线方程，具体求法分两步：

（1）求出 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数，即为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率；

（2）在已知切点坐标和切线斜率的条件下，求得切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$。

当点 $P(x_0,y_0)$ 不在 $y=f(x)$ 上时，求经过点 P 的 $y=f(x)$ 的切线方程，可设切点坐标，由切点坐标得到切线方程，再将 P 点的坐标代入确定切点。特别地，如果曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线平行与 y 轴，这时导数不存在，根据切线定义，可得切线方程为 $x=x_0$。

5. 导数的物理意义：

质点做直线运动的位移 S 是时间 t 的函数 $S(t)$，则 $V=S'(t)$ 表示瞬时速度，$a=v'(t)$ 表示瞬时加速度。

二、导数的运算

1. 常见函数的导数：

（1）$(kx+b)'=k$（k,b 为常数）；　（2）$C'=0$（C 为常数）；

（3）$(x)'=1$；　（4）$(x^2)'=2x$；

（5）$(x^3)'=3x^2$；　（6）$(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$；

（7）$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$；　（8）$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha$ 为常数）；

（9）$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq1)$；　（10）$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$；

（11）$(e^x)'=e^x$；　（12）$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

（13）$(\sin x)'=\cos x$；　（14）$(\cos x)'=-\sin x$。

2. 函数的和、差、积、商的导数：

（1）$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；

（2）$[Cf(x)]'=Cf'(x)$（C 为常数）；

（3）$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

（4）$[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ $(g(x)\neq 0)$。

3. 简单复合函数的导数：

若 $y=f(u), u=ax+b$，则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$，即 $y'_x=y'_u\cdot a$。

选择题（共 14 小题）

1．函数 f（x）=$\sin^2$x 的导数 f′（x）=（　　）

A．2sinx　B．$2\sin^2$x　C．2cosx　D．sin2x

考点：简单复合函数的导数．

分析：将 f（x）=$\sin^2$x 看成外函数和内函数，分别求导即可．

解答：解：

将 y=$\sin^2$x 写成，

y=u^2，u=sinx 的形式．

对外函数求导为 y′=2u，

对内函数求导为 u′=cosx，

故可以得到 y=$\sin^2$x 的导数为

y′=2ucosx=2sinxcosx=sin2x

故选 D

点评：考查学生对复合函数的认识，要求学生会对简单复合函数求导．

2．曲线 f（x）=lnx+2x 在点（1，f（1））处的切线方程是（　　）

A．3x﹣y+1=0　B．3x﹣y﹣1=0　C．3x+y﹣1=0　D．3x﹣y﹣5=0

考点：简单复合函数的导数；直线的点斜式方程．

分析：先要求出在给定点的函数值，然后再求出给定点的导数值．

将所求代入点斜式方程即可．

解答：解：

对 f（x）=lnx+2x 求导，得

f′（x）=$\frac{1}{x}$+2．

故在点（1，f（1））处可以得到

f（1）=ln1+2=2，

f′（1）=1+2=3．

所以在点（1，f（1））处的切线方程是：

y﹣f（1）=f′（1）（x﹣1），代入化简可得，

3x﹣y﹣1=0．

故选 B．

点评：考查了学生对切线方程的理解，要求写生能够熟练掌握．

3．若函数 f（x）=sin2x，则 f′（$\frac{\pi}{6}$）的值为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．0　　C．1　　D．$-\sqrt{3}$

考点：简单复合函数的导数．

专题：计算题．

分析：先利用复合函数的导数运算法则求出 f（x）的导函数，将 $x=\frac{\pi}{6}$代入求出值．

解答：解：f′（x）=cos2x（2x）′=2cos2x

所以 $f'(\frac{\pi}{6})=2\cos\frac{\pi}{3}=1$

故选 C．

点评：求函数在某点处的导数值，应该先利用导数的运算法则及初等函数的导数公式求出导函数，在求导函数值．

4．函数 f（x）=xsinx+cosx 的导数是（　　）

A．xcosx+sinx　　B．xcosx　　C．xcosx﹣sinx　　D．cosx﹣sinx

考点：导数的乘法与除法法则；导数的加法与减法法则．

专题：计算题．

分析：利用和及积的导数运算法则及基本初等函数的导数公式求出函数的导数．

解答：解：∵ f（x）=xsinx+cosx

∴ f′（x）=（xsinx+cosx）′=（xsinx）′+（cosx）′

=x′sinx+x（sinx）′﹣sinx

=sinx+xcosx﹣sinx=xcosx

故选 B

点评：本题考查导数的运算法则、基本初等函数的导数公式．属于基础试题

5．$y=\frac{x^2}{x+3}$的导数是（　　）

A．$\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$　　B．$\frac{x^2+6x}{x+3}$　　C．$\frac{x^2}{(x+3)^2}$　　D．$\frac{x^2-6x}{(x+3)^2}$

考点：导数的乘法与除法法则．

专题：计算题．

分析：利用导数的四则运算法则，按规则认真求导即可

解答：解：$y'=\frac{(x^2)'(x+3)-x^2(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{2x(x+3)-x^2}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$

故选 A

点评：本题考查了导数的除法运算法则，解题时认真计算即可，属基础题

6．y=xlnx 的导数是（　　）

A．x　　B．lnx+1　　C．3x　　D．1

考点：导数的乘法与除法法则．

专题：导数的综合应用．

分析：直接由导数的乘法法则结合基本初等函数的导数公式求解．

解答：解：∵ y=xlnx，

∴ $y'=(x\ln x)'=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$．

故选：B．

点评：本题考查导数的乘法法则，考查了基本初等函数的导数公式，是基础题．

7．函数 $y=\cos e^{x}$ 的导数是（　　）

A．$-e^{x}\sin e^{x}$　　B．$\cos e^{x}$　　C．$-e^{x}$　　D．$\sin e^{x}$

考点：导数的乘法与除法法则．

专题：导数的概念及应用．

分析：根据导数的运算法则即可得到结论．

解答：解：函数的导数为 $f'(x)=-\sin e^{x}\bullet(e^{x})'=-e^{x}\sin e^{x}$，

故选：A

点评：本题主要考查导数的基本运算，要求熟练掌握常见函数的导数公式以及导数的运算法则．

8．已知 $f(x)=\frac{\pi}{2}+\cos x$，则 $f'(\frac{\pi}{2})=$（　　）

A．$-1+\frac{\pi}{2}$　　B．-1　　C．1　　D．0

考点：导数的加法与减法法则．

专题：计算题．

分析：本题先对已知函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}+\cos x$ 进行求导，再将 $\frac{\pi}{2}$ 代入导函数解之即可．

解答：解：$f'(x)=-\sin x$，　$f'(\frac{\pi}{2})=-1$

故选 B．

点评：本题主要考查了导数的运算，以及求函数值，解题的关键是正确求解导函数，属于基础题．

9．函数 $y=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$ 的导数是（　　）

A．$\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$　　B．$\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$　　C．$e^{x}-e^{-x}$　　D．$e^{x}+e^{-x}$

考点：导数的加法与减法法则．

专题：计算题．

分析：根据求导公式 $(u+v)'=u'+v'$ 及 $(e^{x})'=e^{x}$ 即可求出函数的导数．

解答：解：$\because y=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$，

$\therefore y'=\frac{1}{2}(e^{x}-1\times e^{-x})=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$．

故选 A．

点评：本题考查了导数的运算，牢记求导公式是解本题的关键．

10．函数 $y=x^{2}-2x$ 在 -2 处的导数是（　　）

A．-2　　B．-4　　C．-6　　D．-8

考点：导数的加法与减法法则．

专题：计算题；导数的概念及应用．

分析：求出原函数的导函数，在导函数解析中取 $x=-2$ 计算即可得到答案．

解答：解：由 $y=x^{2}-2x$，得 $y'=2x-2$．

$\therefore y'|_{x=-2}=2\times(-2)-2=-6$．

故选 C．

点评： 本题考查了倒数的加法与减法法则，考查了基本初等函数的导数公式，是基础的计算题．

11．设 y=ln（2x+3），则 y′=（　　）

A． $\frac{1}{2(2x+3)}$　　B． $\frac{2}{x+3}$　　C． $\frac{1}{2x+3}$　　D． $\frac{2}{2x+3}$

考点： 导数的运算．

专题： 导数的概念及应用．

分析： 根据复合函数的导数公式即可得到结论．

解答： 解：∵ y=ln（2x+3），

$\therefore y'=\frac{1}{2x+3}\times(2x+3)'=\frac{2}{2x+3}$，

故选：D

点评： 本题主要考查导数的计算，要求熟练掌握复合函数的导数公式，比较基础．

12．已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$，则 f′（x）等于（　　）

A． $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B． $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C． 0　　D． $\sqrt{3}$

考点： 导数的运算．

专题： 导数的概念及应用．

分析： 我们知道：若函数 f（x）=c 为常数，则 f'（x）=0，故可得出答案．

解答： 解：∵ 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$，∴ f'（x）=0．

故选 C．

点评： 本题考查了常数的导数，只要理解常数 $c'=0$ 即可解决此问题．

13．曲线 $y=x^2+3x$ 在点 A（2，10）处的切线的斜率 k 是（　　）

A． 4　　B． 5　　C． 6　　D． 7

考点： 导数的几何意义．

专题： 计算题．

分析： 曲线 $y=x^2+3x$ 在点 A（2，10）处的切线的斜率 k 就等于函数 $y=x^2+3x$ 在点 A（2，10）处的导数值．

解答： 解：曲线 $y=x^2+3x$ 在点 A（2，10）处的切线的斜率

$k=y'=2x+3=2\times2+3=7$，

故答案为　7．

点评： 本题考查函数在某点导数的几何意义的应用．

14．曲线 $y=4x-x^2$ 上两点 A（4，0），B（2，4），若曲线上一点 P 处的切线恰好平行于弦 AB，则点 P 的坐标为（　　）

A． （1，3）　　B． （3，3）　　C． （6，－12）　　D． （2，4）

考点： 导数的几何意义．

分析： 首先求出弦 AB 的斜率，再利用导数的几何意义求出 P 点坐标．

解答： 解：设点 P（x_0，y_0）

∵ A（4，0），B（2，4）

$\therefore k_{AB}=\frac{4-0}{2-4}=-2$

∵ 过点 P 的切线 l 平行于弦 AB

∴ $k_l=-2$

∴ 根据导数的几何意义得知，曲线在点 P 的导数 $y'|_{x=x_0}=4-2x|_{x=x_0}=4-2x_0=-2$，即 $x_0=3$

∵ 点 P（x_0，y_0）在曲线 $y=4x-x^2$ 上

∴ $y_0=4x_0-x_0^2=3$

∴ 故选 B．

点评： 考核导数的几何意义及两条直线平行斜率的关系．

二．填空题（共 2 小题）

15．求导：$(\sqrt{x^2+1})'=$ __$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$__．

考点： 简单复合函数的导数．

专题： 导数的概念及应用．

分析： 根据复合函数的导数公式进行求解即可．

解答：

解：$\sqrt{x^2+1}=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$，

则函数的导数为 $y'=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)'=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$，

故答案为：$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

点评： 本题主要考查导数的计算，根据复合函数的导数公式是解决本题的关键．

16．函数 $y=\sqrt{2x+5}$ 的导数是__$\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$__．

考点： 简单复合函数的导数．

专题： 导数的概念及应用．

分析： 根据复合函数的导数公式进行计算即可．

解答：

解：函数的导数为 $y'=\frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}}(2x+5)'=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$，

故答案为：$\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$

点评： 本题主要考查导数的计算，根据复合函数的导数公式进行计算是解决本题的关键．

三．解答题（共 1 小题）

17．求函数 $y=e^{-5x}+2$ 的导数．

考点： 简单复合函数的导数．

专题： 导数的概念及应用．

分析： 直接利用复合函数的导数求解运算法则求解即可．

解答： 解：函数 $y=e^{-5x}+2$ 的导数：$y'=-5e^{-5x}$．

故答案为：$y'=-5e^{-5x}$．

点评： 本题考查导数的运算，基本知识的考查．