刘徽的“割圆术”与微积分

在讲授数列极限概念之前，介绍了我国古代数学家刘徽的割圆术中极限思想，进而引入数列极限的描述定义．　实际上，刘徽借“割圆术”方法，凭借其高超的对无限问题的理解和致用的处理方式，以“不可分量可积”前提、“夹逼准则”等知识证明了圆的面积公式，运算中包含着微积分的思想．另外要指出的是，他利用证明圆面积公式所设计出的机械性的算法程序，求得的圆周率的近似值—徽率（157÷50）．郭书春先生认为，刘徽在世界上最先把无穷小分割和极限思想用于数学证明．

1．刘徽的“割圆术”

我国古代数学经典《九章算术》第一章“方田”中有我们现在所熟悉圆面积公式“半周半径相乘得积步”．　魏晋时期数学家刘徽为证明这个公式，于公元 263　年撰写《九章算术注》，在这一公式后面写了一篇长约 1800　余字的注记——“割圆术”．

“割之弥细，所失弥少．　割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣！　觚面之外，犹有余径，以面乘余径，则幂出弧表．　若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径．　表无余径，则幂不外出矣．　以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍，故以半周乘半径而为圆幂．”

2．几点注记

在证明这个圆面积公式的时候有两个重要思想，一个就是我们现

在所讲的极限思想．　第二个是无穷小分割思想．

2.1　数列极限的夹逼准则

刘徽利用割圆术证明圆的面积公式时，用了“夹逼准则”（Squeeze　Theorem）．他从圆内接正 6　边形开始割圆，设圆面积为S_0，半径为r，圆内接正n　边形边长为l_n，周长为L_n，面积为S_n，将边数加倍后，得到圆内接正$2n$　边形的边长、周长、面积分别记为：l_{2n}、L_{2n}、S_{2n}．

刘徽用“勾股术”得：若知L_n，则可求出圆内接正$2n$边形的面积；

刘徽认为，“觚面之外，犹有余径，以面乘余径，则幂出弧表”：

$$S_{2n} < S_0 < S_n + 2(S_{2n} - S_n) = S_{2n} + (S_{2n} - S_n),$$

“若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径．　表无余径，则幂不外出矣．”

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} < S_0 < \lim_{n\to\infty}\left[S_n + 2(S_{2n} - S_n)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[S_{2n} + (S_{2n} - S_n)\right].$$

即在n　趋于无穷大时，圆内接正多边形的面积就是圆面积．

2.2　　折中的无限分割方法

关于量可分的两种假定，在中国古代对应着两个命题．“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的“尺棰命题”中隐含着一个量无限可分（潜无限）　的假定．　而“非半弗斫，说在端”的“非半弗斫”命题则认为一个量是有非常多的极微小的不可分部分组成的．

与西方的数学家不同，中国古代的数学家从未受到无限问题的困扰．　刘徽在遇到无理数时采用“开方不尽求微数”．显然，尽管刘徽对“开方不尽”的理解比前人深刻，但中国古代数学重视实际的传

统的确是限制了对理论问题作更深层次的探讨．因而，这也阻碍了无理数的发现．刘徽认为只须得到无限接近的一个值就可以；因此他只关心重要计算方法，而根本不用考虑这个无限问题本身的性质．对于割圆术，刘徽显然受墨家思想的影响很深，而且刘徽对割圆术的处理也比较符合中国古代数学讲求直观的传统．

另外，从墨家的传统来看刘徽的处理也较好理解，实际上刘徽在无限的运用上，其思想和墨、道两家一脉相承．刘徽将道、墨两家的无限思想辩证地统一起来，即无须由于受到无限的困扰．刘徽道“割之又割，以至于不可割，则与圆周和体而无所失矣”．同样，刘徽在“阳马术”（四棱锥体积）中说道：“半之弥少，其余弥细，至细曰微，微则无形，由是言之，安取余哉?”这里刘徽对待无限的态度是作一个可操作的程序“割之”（或阳马术中的“半之”)的动作． 同时这个动作又可无限地做下去，那么在极限过程下正多边形的周长即为圆的周长． 这种辩证的极限思想使有关“量的可分性”假定都得到了解释，从某种意义上来说刘徽的极限思想与现代的微积分思想一致．

2.3 不可分量可积的思想

刘徽受《墨经》的影响认为“不可分量可积”，除无限分割外，刘徽还利用不可分量可积的思想处理问题．在他的观念里，线可以看成是由一系列点组成的，面可以看成是由一系列线组成的，体可以看成是由一系列面组成的．这样刘徽在处理无限问题而作积分时就有了思想依据．他在“割圆术”中通过对无限分割的独特理解，和夹逼准

则的使用，认为极限状态下考虑与圆合体的正无穷多边形，它们是由以圆心为顶点，以每边为底的无穷多个小等腰三角形，此小等腰三角形是不可分量．此时，设圆周长为L，每个小等腰三角形的底边长为l，面积为A．刘徽以“不可分量可积”为前提容易得到所有等腰三角形的底边可积为圆的周长L:$\sum l = L$．于是，

$$\sum rl = r\sum l = rL = \sum 2A = 2\sum A = 2S_0,$$

“故以半周乘半径而为圆幂”：$S_0 = \frac{1}{2}Lr$．

2.4　　目的是证明圆面积公式而非求圆周率

刘徽费尽周折，殚精竭虑创立包含着朴素微积分的割圆术，目的只是为证明圆的面积公式，从而他说：此以周、径，为至然之数，非周三径一之率也．为此他同样使用割圆术中的数据，提出了求圆周率近似值的程序．于是得到下表：

利用，$S_{2n} < S_0 < S_n + 2(S_{2n} - S_n) = S_{2n} + (S_{2n} - S_n)$，

得到：$\frac{314\times 64}{625} < S_0 < \frac{314\times 169}{625}$，

由$S_0 = \frac{1}{2}Lr$，得$L \approx \frac{2S_{2n}}{r} = 628$．故$\pi = \frac{628}{200} = 3.14$．

科学史上的诸多事实都显示出无穷概念的巨大重要性和深远影响．实数系的逻辑基础在十九世纪末叶才被建立的事实之所以令人惊奇，正是因为人们在理解无穷这个概念上所遇到的巨大困难造成的．对无穷的思考并试图理解它和准确地定义它，是对人类智慧的一个挑战．古希腊以降无穷的概念就引起了先哲们的注意，但它固有的超越人类有限思维的特征，使得人们对它理解的进展十分缓慢．希尔伯特曾说过，无穷是一个永恒的谜．直到 19　世纪，柯西和魏尔斯

特拉斯给出极限的精确定义为止，人们都无法逾越这一思维中的结症.

因为极限的“ε2”定义，术语抽象且符号陌生，其中的辩证关系不易搞清.这个概念中内含诸多玄机.它简练外表,隐藏了2000 余年来人类面对无限的困惑和努力.这个定义包含着“动与静”的辩证法，包含着从有限到无穷的飞跃，包含着纯洁的数学美.

个体的认识规律会“重演”数学史的发展历程，因此在教学中，学生自然会提出的一系列问题：既然极限描述性定义简单明白，为什么要搞个“ε2”定义？ 它与描述性定义有什么不同？ 数学家怎么会想出这种“古怪而讨厌”的定义？ 正如 R ·柯朗和 H ·罗宾所说:“初次遇到它时暂时不理解是不足为怪的，遗憾的是某些课本的作者故弄玄虚，他们不作充分的准备，而只是把这个定义直接向读者列出，好象作些解释就有损于数学家的身份似的.”要弄清这些问题，只有翻开数学史，从哲学的角度认识极限法，这样不仅能帮助我们搞清极限的概念，也有助于建立正确的数学观念.