

自然常数 e 是怎么产生的？

无理数 e 是用来描述自然界变化不可缺少的常数，自然界的细菌繁殖、经济增长和衰退、放射性元素的衰变等等都离不开这个数字来描述。 e 是自然对数的底数，是增长的极限。下面这个例子就是对 e 直观含义的极好诠释。

假如您把一块钱存入一家银行，银行的年利率为100%（方便计算）。那么在一年复利一次的情况下，到年终时本利和为2元。若银行允许中间取本息，而且利息是平均分到各个时段的，如年利率为100%，那么半年利率就为50%。这时如果不嫌麻烦，您可以选择半年取一次钱，再连本带利的存入银行，即半年复利一次，那么第一个半年连本带利为 $(1+0.5)$ 元，第二个半年就要把这 $(1+0.5)$ 元作为下一期的本金，利上加利，这时年末您将得到本利和为 $1 \times (1+0.5)^2 = 2.25$ 元。

若每月复利一次的情况下，到年终时本利和约为

$$\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.61303529 \text{ 元}.$$

如果您不嫌麻烦，银行允许，您可以多跑几次，甚至每天都去银行一次，这样的话（每天复利一次的情况下），到年终时本利和约为 $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.714567455$ 元。

看来，每次把利息加入到本金的时间越短，所获得的利息就越多。那么假设复利一次的时间变成每小时，每分钟，甚至每秒钟！那您可以想到，本利和就会越来越大。

把一年分成 n 次，您将得到的本利和为 $1 \times (1 + \frac{1}{n})^n$ ，如果每时每刻都在计息，即 n 无限增大，会不会达到一个天文数字呢？

其实这是不可能的，高等数学中 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 在 n 趋于无穷大时的极限就是 e 。也就是说最多就只能得到约 2.7 元这么多了。如果把利息由 1 变为 r ，那么最多能得到 e 的 r 次幂这么多。想想看，这也是情理之中的事情，哪里可能有将不多的本金存入银行就自动变成亿万富翁的美事呢。

在极限研究中， $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ 是一个重要、基本而且常用的极限。在历史上欧拉首先认识到它不是有理数，也就是不能写成两个整数相除的形式，而是一个无限不循环小数，并且率先提倡用字母 e 来表示它，人们称之为欧拉数（注意，非欧拉常数）。它的近似值为 $e = 2.718281828459045235360287471353 \dots$ 。

自然常数 e 是单位时间内持续翻倍增长能达到的极限值，在大自然中，自然现象是不间断的、连续的，例如植物生长，新生长的部分会立刻和母体一样再生长，您可以想象成它们时时刻刻把“利息”自动加入“本金”中去，这就是大自然的复利率。我们可以把 e 看作是自然增长的极限值，这也许是 e 为底的对数就称为自然对数的缘故吧。