

第三次数学危机

数学史上的第三次危机，是由 1897 年的突然冲击而出现的，到现在，从整体来看，还没有解决到令人满意的程度。这次危机是由于在康托尔的一般集合理论的边缘发现悖论造成的。由于集合概念已经渗透到众多的数学分支，并且实际上集合论成了数学的基础，因此集合论中悖论的发现自然地引起了对数学的整个基本结构的有效性的怀疑。

简介

悖论的产生 --- 第三次数学危机

1897 年，福尔蒂揭示了集合论中的第一个悖论。两年后，康托发现了很相似的悖论。1902 年，罗素又发现了一个悖论，它除了涉及集合概念本身外不涉及别的概念。罗素悖论曾被以多种形式通俗化。其中最著名的是罗素于 1919 年给出的，它涉及到某村理发师的困境。理发师宣布了这样一条原则：他给所有不给自己刮脸的人刮脸，并且，只给村里这样的人刮脸。当人们试图回答下列疑问时，就认识到了这种情况的悖论性质：“理发师是否自己给自己刮脸？”如果不给自己刮脸，那么他按原则就该为自己刮脸；如果他给自己刮脸，那么他就不符合他的原则。

罗素悖论的精确表述：

如果存在一个集合 $A = \{x \mid x \notin A\}$ ，那么 $A \subset A$ 是否成立？如果它成立，那么 $x \in A$ ，不满足 A 的特征性质。如果它不成立， A 就满足了特征性质。

罗素悖论使整个数学大厦动摇了。无怪乎弗雷格在收到罗素的信之后，在他刚要出版的《算术的基本法则》第 2 卷末尾写道：“一位科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成之时，它的基础垮掉了，当本书等待印出的时候，罗素先生的一封信把我置于这种境地”。于是终结了近 12 年的刻苦钻研。

承认无穷集合，承认无穷基数，就好像一切灾难都出来了，这就是第三次数学危机的实质。尽管悖论可以消除，矛盾可以解决，然而数学的确定性却在一步一步地丧失。现代公理集合论的大堆公理，简直难说孰真孰假，可是又不能把它们都消除掉，它们跟整个数学是血肉相连的。所以，第三次危机表面上解决了，实质上更深刻地以其它形式延续着。

背景

第三次数学危机产生于十九世纪末和二十世纪初，当时正是数学空前兴旺发达的时期。首先是逻辑的数学化，促使了数理逻辑这门学科诞生。

十九世纪七十年代康托尔创立的集合论是现代数学的基础，也是产生危机的直接来源。十九世纪末，戴德金及皮亚诺对算术及实数理论进行公理化，推动了公理化运动。而公理化运动的最大成就则是希尔伯特在 1899 年对于初等几何的公理化。

定义

为了讲清楚第三次数学危机的来龙去脉，我们首先要说明什么是数学危机。一般来讲，危机是一种激化的、非解决不可的矛盾。从哲学上来看，矛盾是无处不在的、不可避免的，即便以确定无疑著称的数学也不例外。

数学中有大大小小的许多矛盾，比如正与负、加法与减法、微分与积分、有理数与无理数、实数与虚数等等。但是整个数学发展过程中还有许多深刻的矛盾，例如有穷与无穷，连续与离散，乃至存在与构造，逻辑与直观，具体对象与抽象对象，概念与计算等等。在整个数学发展的历史上，贯穿着矛盾的斗争与解决。而在矛盾激化到涉及整个数学的基础时，就产生数学危机。

矛盾的消除，危机的解决，往往给数学带来新的内容，新的进展，甚至引起革命性的变革，这也反映出矛盾斗争是事物发展的历史动力这一基本原理。整个数学的发展史就是矛盾斗争的历史，斗争的结果就是数学领域的发展。

研究

人类最早认识的是自然数。从引进零及负数就经历过斗争：要么引进这些数，要么大量的数的减法就行不通；同样，引进分数使乘法有了逆运算——除法，否则许多实际问题也不能解决。但是接着又出现了这样的问题，是否所有的量都能用有理数来表示？于是发现无理数就导致了第一次数学危机，而危机的解决也就促使逻辑的发展和几何学的体系化。

方程的解导致了虚数的出现，虚数从一开始就被认为是“不实的”。可是这种不实的数却能解决实数所不能解决的问题，从而为自己争得存在的权利。

几何学的发展从欧几里得几何的一统天下发展到各种非欧几何学也是如此。在十九世纪发现了许多用传统方法不能解决的问题，如五次及五次以上代数方程不能通过加、减、乘、除、乘方、开方求出根来；古希腊几何三大问题，即三等分任意角、倍立方体、化圆为方不能通过圆规、直尺作图来解决等等。

这些否定的结果表明了传统方法的局限性，也反映了人类认识的深入。这种发现给这些学科带来极大的冲击，几乎完全改变了它们的方向。比如说，代数学从此以后向抽象代数学方面发展，而求解方程的根变成了分析及计算数学的课题。在第三次数学危机中，这种情况也多次出现，尤其是包含整数算术在内的形式系统的不完全性、许多问题的不可判定性都大大提高了人们的认识，也促进了数理逻辑的大发展。

发展

这种矛盾、危机引起的发展，改变面貌，甚至引起革命，在数学发展历史上是屡见不鲜的。第二次数学危机是由无穷小量的矛盾引起的，它反映了数学内部的有限与无穷的矛盾。数学中也一直贯穿着计算方法、分析方法在应用与概念上清楚及逻辑上严格的矛盾。在这方面，比较注意实用的数学家盲目应用。而比较注意严密的数学家及哲学家则提出批评。只有这两方面取得协调一致后，矛

盾才能解决。后来算符演算及 δ 函数也重复了这个过程，开始是形式演算、任意应用，直到施瓦尔兹才奠定广义函数论的严整系统。

危机

对于第三次数学危机，有人认为只是数学基础的危机，与数学无关。这种看法是片面的。诚然，问题涉及数理逻辑和集合论，但它一开始就牵涉到无穷集合，而现代数学如果脱离无穷集合就可以说寸步难行。因为如果只考虑有限集合或至多是可数的集合，那绝大部分数学将不复存在。而且即便这些有限数学的内容，也有许多问题要涉及无穷的方法，比如解决数论中的许多问题都要用解析方法。由此看来，第三次数学危机是一次深刻的数学危机。

解决

数学家们通过将集合的构造公理化来排除了这样的集合的存在性。

例如，在策梅洛(Zermelo)和弗伦克尔(Fraenkel)等提出的 ZF 公理系统(也称 ZFC 公理系统)中，严格规定了一个集合存在的条件(简单地说，存在一个空集【空集公理】；每个集合存在幂集【幂集公理】；每个集合里所有的集合取并也形成集合【并集公理】；每个集合的满足某条件的元素构成子集【子集公理】；一个“定义域”为 A 的“函数”存在“值域”【替换公理】等)，这样无法定义出悖论中的集合。

第三次数学危机就此在一定程度上解决。