第二次数学危机一无穷小是 0 还是非 0

第二次数学危机，指发生在十七、十八世纪，围绕微积分诞生初期的基础定义展开的一场争论，这场危机最终完善了微积分的定义和与实数相关的理论系统，同时基本解决了第一次数学危机的关于无穷计算的连续性的问题，并且将微积分的应用推向了所有与数学相关的学科中。

危机背景

芝诺悖论

这次危机的萌芽出现在大约公元前 450 年，芝诺注意到由于对无限性的理解问题而产生的矛盾，提出了关于时空的有限与无限的四个悖论：

“两分法”：向着一个目的地运动的物体，首先必须经过路程的中点，然而要经过这点，又必须先经过路程的 $1/4$ 点……，如此类推以至无穷。——结论是：无穷是不可穷尽的过程，运动是不可能的。

“阿基里斯追不上乌龟”：阿基里斯总是首先必须到达乌龟的出发点，因而乌龟必定总是跑在前头。这个论点同两分法悖论一样，所不同的是不必把所需通过的路程一再平分。

“飞矢不动”：意思是箭在运动过程中的任一瞬时间必在一确定位置上，因而是静止的，所以箭就不能处于运动状态。

“操场或游行队伍”：A、B 两件物体以等速向相反方向运动。从静止的 c 来看，比如说 A、B 都在 1 小时内移动了 2 公里，可是从 A 看来，则 B 在 1 小时内就移动了 4 公里。运动是矛盾的，所以运动是不可能的。

芝诺揭示的矛盾是深刻而复杂的。前两个悖论诘难了关于时间和空间无限可分，因而运动是连续的观点，后两个悖论诘难了时间和空间不能无限可分，因而运动是间断的观点。芝诺悖论的提出可能有更深刻的背景，不一定是专门针对数学的，但是它们在数学王国中却掀起了一场轩然大波。它们说明了希腊人已经看到“无穷小”与“很小很小”的矛盾，但他们无法解决这些矛盾。其后果是，希腊几何证明中从此就排除了无穷小。

微积分的出现

经过许多人多年的努力，终于在 17 世纪晚期，形成了无穷小演算——微积分这门学科。牛顿和莱布尼兹被公认为微积分的奠基者，他们的功绩主要在于：把各种有关问题的解法统一成微分法和积分法；有明确的计算步骤；微分法和积分法互为逆运算。由于运算的完整性和应用的广泛性，微积分成为当时解决问题的重要工具。

危机爆发

在微积分大范围应用的同时，关于微积分基础的问题也越来越严重。关键问题就是无穷小量究竟是不是零？无穷小及其分析是否合理？由此而引起了数学界甚至哲学界长达一个半世纪的争论，造成了第二次数学危机。

无穷小量究竟是不是零？两种答案都会导致矛盾。牛顿对它曾作过三种不同解释：1669年说它是一种常量；1671年又说它是一个趋于零的变量；1676年它被“两个正在消逝的量的最终比”所代替。但是，他始终无法解决上述矛盾。莱布尼兹曾试图用和无穷小量成比例的有限量的差分来代替无穷小量，但是他也没有找到从有限量过渡到无穷小量的桥梁。

英国大主教贝克莱于1734年写文章，攻击流数(导数)“是消失了的量的鬼魂……能消化得了二阶、三阶流数的人，是不会因吞食了神学论点就呕吐的。”他说，用忽略高阶无穷小而消除了原有的错误，“是依靠双重的错误得到了虽然不科学却是正确的结果”。贝克莱虽然也抓住了当时微积分、无穷小方法中一些不清楚不合逻辑的问题，不过他是出自对科学的厌恶和对宗教的维护，而不是出自对科学的追求和探索。

当时一些数学家和其他学者，也批判过微积分的一些问题，指出其缺乏必要的逻辑基础。例如，罗尔曾说：“微积分是巧妙的谬论的汇集。”在那个勇于创造时代的初期，科学中逻辑上存在这样那样的问题，并不是个别现象。

18世纪的数学思想的确是不严密的、直观的，强调形式的计算而不管基础的可靠。其中特别是：没有清楚的无穷小概念，从而导数、微分、积分等概念不清楚；无穷大概念不清楚；发散级数求和的任意性等等；符号的不严格使用；不考虑连续性就进行微分，不考虑导数及积分的存在性以及函数可否展成幂级数等等。

初步解决

直到 19 世纪 20 年代，一些数学家才比较关注于微积分的严格基础。从波尔查诺、阿贝尔、柯西、狄里赫利等人的工作开始，到威尔斯特拉斯、狄德金和康托的工作结束，中间经历了半个多世纪，基本上解决了矛盾，为数学分析奠定了一个严格的基础。

波尔查诺给出了连续性的正确定义；阿贝尔指出要严格限制滥用级数展开及求和；柯西在 1821 年的《代数分析教程》中从定义变量出发，认识到函数不一定要有解析表达式；他抓住极限的概念，指出无穷小量和无穷大量都不是固定的量而是变量，无穷小量是以零为极限的变量；并且定义了导数和积分；狄里赫利给出了函数的现代定义。在这些工作的基础上，威尔斯特拉斯消除了其中不确切的地方，给出现在通用的极限的定义，连续的定义，并把导数、积分严格地建立在极限的基础上。

19 世纪 70 年代初，威尔斯特拉斯、狄德金、康托等人独立地建立了实数理论，而且在实数理论的基础上，建立起极限论的基本定理，从而使数学分析建立在实数理论的严格基础之上。

事件影响

这次危机不但没有阻碍微积分的迅猛发展和广泛应用，反而让微积分驰骋在各个科技领域，解决了大量的物理问题、天文问题、数学问题，大大推进了工业革命的发展。就微积分自身而言，经过本次危机的“洗礼”，其自身得到了不断的系统化，完整化，扩展出了不同的分支，成为了 18 世纪数学世界的“霸主”。

同时，第二次数学危机也促进了 19 世纪的分析严格化、代数抽象化以及几何非欧化的进程。

不同意见

关于第二次数学危机，自其爆发开始直到二十一世纪，始终都存在着不同意见。著名的数学家欧拉就坚持认为在求导数的运算中，其结果应该是 $0/0$ 。他举例说，如果计算地球的数值，则一颗灰尘、甚至成千上万颗灰尘的误差都是可以忽略的。但是在微积分的运算中，“几何的严格性要求连这样小的误差也不能有。”马克思在他的《数学手稿》中说得更明确：求导数的运算的结果应该是严格的、特定的 $0/0$ ，批判了所谓“无限趋近”的说法。同时也有言论称，该危机在二十世纪前的数学研究体制下无法彻底解决。