常见曲线的参数方程和极坐标方程

一、参数方程

在平面直角坐标系中，如果曲线上 S 的点 $P(x,y)$ 的 x、y 都是某个变量 t 的函数，即

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

并且对于 t 的每一个数值，由该方程组确定的点 P 在曲线 S 上，那么此方程组叫做曲线 S 的参数方程，变量 t 叫做参数，可以有物理或几何上的意义，也可以没有具体的含义.

(1) 圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=x_0+a\cos t, \\ y=y_0+a\sin t, \end{cases}$ 参数 t 表示圆心角.

(2) 过点 $P_0(x_0,y_0)$ 、倾斜角为 θ 的直线的参数方程为 $\begin{cases} x=x_0+t\cos\theta, \\ y=y_0+t\sin\theta. \end{cases}$ 当然也可以用 $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ 表示，参数 t 没有几何意义.

(3) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程可用 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$ 表示.

(4) 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程可用 $\begin{cases} x=a\sec\theta \\ y=b\tan\theta \end{cases}$ 表示.

(5) 抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程可用 $\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$ 表示.

二、极坐标方程

1. 极坐标系

在平面上从一定点 O 出发，引一条射线 OX，同时确定一个长度单位和计算角度的正方向(通常取逆时针方向为正方向)，这样就建立了一个极坐标系，其中 O 称为极点，射线 OX 称为极轴.

设 P 是平面上任意一点，用 r 表示线段 OP 的长度，用 θ 表示以射线 OX 为始边，射线 OP 为终边所成的角. 那么，有序数对(r,θ)就叫做点 P 的极坐标. 其中 r 叫做点 P 的极径，θ 叫做点 P 的极角.

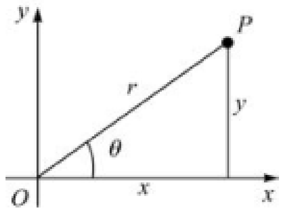
(1) 极点 O 的极径 $r=0$，极角 θ 是任意的.

(2) 当限制 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$ 时，平面上的点 P(极点 O 除外)与实数对(r,θ)之间具有一一对应关系.

2. 直角坐标系和极坐标系的坐标转化关系为 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$.

其中 $r\geqslant 0$，θ 的大小由点 P 所在的象限决定，一般取最小正角($0\leqslant\theta<2\pi$)，这样直角坐标和极坐标可相互转化.

3. 曲线的极坐标方程



(1) 直线 $x=a$ 的极坐标方程为 $r=\dfrac{a}{\cos\theta}$；

(2) 直线 $y=a$ 的极坐标方程为 $r=\dfrac{a}{\sin\theta}$；

(3) 圆 $x^2+y^2=a^2\,(a>0)$的极坐标方程为　$r=a$；

(4) 圆 $(x-a)^2+y^2=a^2\,(a>0)$的极坐标方程为 $r=2a\cos\theta$；

(5) 圆 $x^2+(y-a)^2=a^2\,(a>0)$的极坐标方程为 $r=2a\sin\theta$.

1650 年数学家笛卡儿邂逅瑞典公主克里斯汀，并写信表白爱慕之意，信上只有一个公式，$r=a(1-\sin\theta)$，是用 MathStudio 软件画出的图形，因其图形像一颗心的形状而被称为“心形线”，这封信现在仍在欧洲的博物馆.