定积分的综合计算

授课教师：李辉

泰山护理职业学院

一 含绝对值的定积分

方法： 利用积分区间的可加性：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-1}^{2} |x|\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ \mathrm{e}^x, x>0 \end{cases}，求\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$$

一 含绝对值的定积分

例1. 求定积分 $\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x$.

解：$\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}|x|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}|x|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}-x\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{2}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

二 对称区间上的定积分

对称区间

设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，

结论：

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{若} f(x) \text{为奇函数} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & \text{若} f(x) \text{为偶函数} \end{cases}$$

二 对称区间上的定积分

例2. 求定积分 $\int_{-2}^{2}(1+x^2\sin x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$

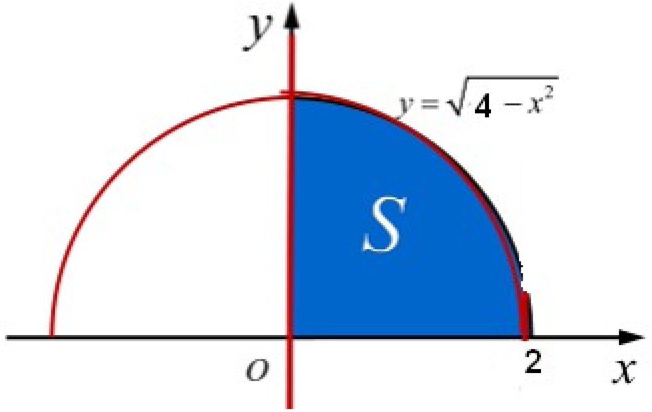
解： $\int_{-2}^{2}(1+x^2\sin x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

奇函数

$$=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\sin x\,\mathrm{d}x$$

偶函数

$$=2\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x+0=2\times\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=2\pi$$



三　换元积分法的灵活应用

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal[a=\varphi(\alpha),\, b=\varphi(\beta)]{x=\varphi(t)\text{单调可导}} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

换元同时换限

上限对上限，下限对下限

三 换元积分法的灵活应用

例3. 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$,

其中 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续.

$$\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos t$$

证明：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\frac{\pi}{2}-t)=-\mathrm{d}t$,

当 $x=0$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$, 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $t=0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f[\sin(\frac{\pi}{2}-t)]\cdot(-\mathrm{d}t)$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

四 分部积分法的应用

分部积分公式

$$\int_a^b u\, v'\mathrm{d}x = \int_a^b u\,\mathrm{d}v = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

例4 已知 xe^x 是 $f(x)$ 的一个原函数，试求 $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

解：Q $x^e x$是的$f(x)$一个原函数，

$\therefore f(x)=\left(xe^x\right)$ 且 $f(x)dx = xe^x + C$

$\therefore f(x) = e^x + xe^x$

$$\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}(f(x))$$

$$= xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= xf(x)\Big|_0^1 - xe^x\Big|_0^1$$

$$= f(1) - 0 - (e - 0)$$

$$= e$$

五 多种积分方法的结合使用

方法

1. 直接积分法
2. 第一类换元积分法
3. 第二类换元积分法
4. 分部积分法

五 多种积分方法的结合使用

例5. 求定积分 $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$.

第二类换元积分法
+
分部积分法

解：令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2\,(t\geq 0)$，$dx=2tdt$

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=4$ 时，$t=2$

$$原式=\int_0^2 e^t\cdot 2tdt=2\int_0^2 te^t dt=2\int_0^2 td(e^t)=2\left(te^t\Big|_0^2-\int_0^2 e^t dt\right)$$

$$=2\left(2e^2-e^t\Big|_0^2\right)=2(2e^2-e^2+1)=2(e^2+1)$$

练 习

计算 $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx$

u 与 v' 的选择顺序：

对、反、幂、三、指

解：设 $t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2 \quad \therefore dx=2tdt$

$x=0 \Rightarrow t=0,$ $\qquad x=\dfrac{\pi^2}{4} \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$

$$\text{原式}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,d(-\cos t)$$

$$=2\left([-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\right) = [2\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

课堂小结

一 含绝对值的定积分

方法：利用积分区间的可加性：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

二 对称区间上的定积分

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & 若f(x)为奇函数\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & 若f(x)为偶函数\end{cases}$$

三 换元积分法的灵活应用

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal[a=\varphi(\alpha),\,b=\varphi(\beta)]{x=\varphi(t)\text{单调可导}} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

换元同时换限

上限对上限，下限对下限

课堂小结

四 分部积分法的应用

分部积分公式

$$\int_a^b u v'\mathrm{d}x = \int_a^b u\mathrm{d}v = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$$

五 多种积分方法的结合使用

方法

1. 直接积分法
2. 第一类换元积分法
3. 第二类换元积分法
4. 分部积分法

谢谢观看！